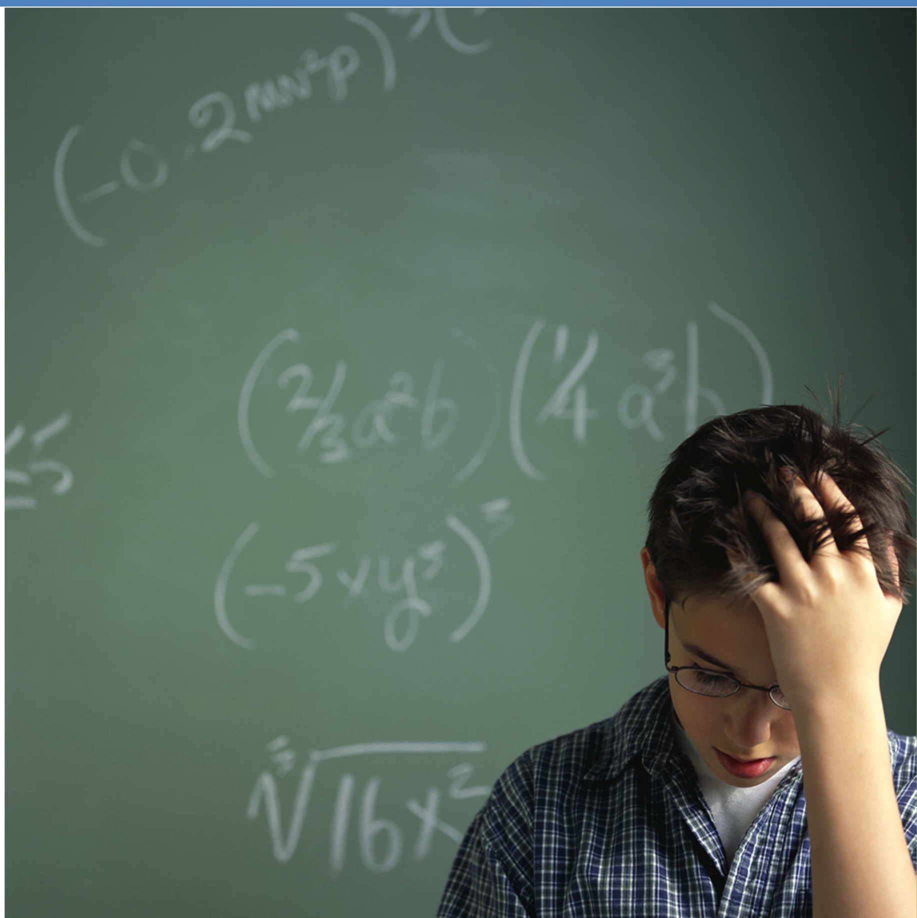
2011 год

Высшая математика для чайников. Предел функции.



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

$\int f(x)dx$

Виосагмир И.А.

Предел функции

2011 год

viosagmir@gmail.com

Предел функции

Введение

Ну что же… Я приветствую Вас в своей первой книге, посвященной пределам функции. Это первая часть из моей будущей серии “*высшая математика для чайников*”. Название книги уже должно Вам многое о ней рассказать, но Вы его можете совершенно не так понять. Эта книга посвящена не “чайникам”, а всем тем, кому нелегко понять то, что творят профессоры в своих книгах. Я уверен, что Вы меня понимаете. Я сам находился и нахожусь в такой ситуации, что просто вынужден прочитывать одно и то же предложение несколько раз. Это нормально? Я думаю – нет.

Так чем же моя книга отличается от всех других? Во-первых, здесь нормальный язык, а не “заумный”; во-вторых здесь разобрана масса примеров, которая, кстати, наверняка, пригодится вам; в-третьих, текст имеет существенное различие между собой – главные вещи выделены определенными маркерами, и наконец, моя цель лишь одна – ваше понимание. От Вас требуется только одного: желания и умения. “Умения?” – спросите Вы. Да! Умения **ЗАПОМИНАТЬ** и **ПОНИМАТЬ**.

Вообще рекомендуется завести отдельно тетрадку листов этак на 65, и все в ней писать. Все, что написано в этой книге. Результат будет впечатляющим, это я Вам обещаю. Так же лучше пользоваться разноцветными фломастерами. Ну что же, господа… Я хочу Вам пожелать успехов и понимания. Если Вы добьете эту книгу, Вы сможете многое!!!

В моей книге будут встречаться некоторые обозначения. Крайне рекомендую им следовать.

 - учить обязательно! 

- рекомендуется попробовать сделать самим.

 - можно не учить, но нужно понять!

В Добрый путь!

Содержание

Глава 1. Предел функции

Предел функции в точке……………………………………………………………3
Теоремы о пределах……………………………………………………………13
Односторонние пределы……………………………………………………………14
Предел при $x \to \infty$……………………………………………………………17
Бесконечно большие функции……………………………………………………………25
Графики элементарных функций……………………………………………………………26

Глава 2. Непрерывность функции в точке

Непрерывность функции в точке……………………………………………………………31
Непрерывность сложной функции……………………………………………………………33
Классификация точек разрыва……………………………………………………………36
Непрерывность элементарных функций……………………………………………………………41
Первый замечательный предел……………………………………………………………42
Второй замечательный предел……………………………………………………………47
Кратко о Maple……………………………………………………………*52*

Глава 3. Бесконечно малые функции

Сравнение бесконечно малых функций……………………………………………………………55
Свойства символа “о малое”……………………………………………………………60
Асимптотические формулы……………………………………………………………64

Глава 1. Предел функции.

1. Предел функции в точке.

Содержание:

1) Предел функции в точке
2) Теоремы о пределах
3) Односторонние пределы
4) Предел, при $x \to \infty$
5) Бесконечно большие функции
6) Графики элементарных функций

Пусть x — числовая переменная величина, X — область ее изменения. Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое число y, то говорят, что на множестве X определена *функция*, и пишут $y = f(x)$.

x —независимая переменная (аргумент).
X —область определения функции $f(x)$.
y —частное значение функции $f(x)$ в точке.

Надеюсь это Вам понятно, но я на всякий случай поясню. Множество X в данном случае – плоскость, состоящая из двух координатных осей – 0X и 0Y. Это вам должно быть известно еще со школы. Если Вы забыли это, открывайте класс 7 – 8 и повторяйте. Для примера, на рис. 1 изображена функция $y = x^2$. Оси 0X и 0Y образуют X — область ее изменения. Мы прекрасно видим на рис. 1, как ведет себя функция. В таком случае говорят, что на множестве X определена функция $y = x^2$.

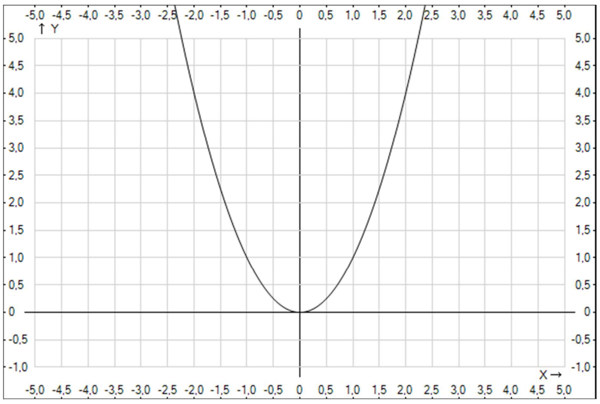


Рис. 1

Совокупность Y всех частных значений функции называется множеством значений $f(x)$.

Другими словами, множество значений – это промежуток по оси OY, где определена функция. Для примера, рассмотрим рис. 1. $f(x) = x^2$ – отсюда сразу видно, что $f(x) > 0$, т.к. $x^2 > 0$. На рисунке это явно видно. В данном случае область значений = $[0; +\infty]$. Запомните, множество значений смотрим по 0Y!

Совокупность всех x называется областью определения $f(x)$.

Делаем вывод из предыдущих соображений и понимаем, что множество определений смотрим по $0X$. В нашем случае ОДЗ = $[-\infty; +\infty]$.

Точка a ($a \in X$ или $a \neq X$) называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки a имеются точки множества X, отличные от a.

Здесь я дополнять ничего не буду. И так все ясно. Можно лишь добавить, что в нашем случае a — предельная точка множества X — области определения функции $f(x)$.

Так, давайте перед определением я в общих словах объясню, что такое предел функции. Число b, к которому стремится функция при стремлении x к числу a, называется пределом функции. Вот так это все записывается:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Например, $f(x) = x^2$. Нам нужно узнать, к чему стремится (не равна!) функция, при $x \to 2$. Сначала запишем предел:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2$$

Теперь пришло время взглянуть на график. Проведем параллельно $0Y$ линию через точку 2 на оси $0X$. Она пересекла наш график в точке $(2;4)$. Опустим из этой точки на ось $0Y$ перпендикуляр и… опа! Какое там значение? Все правильно, 4. Вот к чему стремится наша функция, при $x \to 2$.

Сложно? Ну, нет, конечно! Вы, наверное, заметили, что если подставить в функцию $f(x)$ значение 2, то ответ будет таким же. Совершенно верно. Так и решаются эти "сложные" лимиты. Не забывайте проверять на определенность! Определенность, это, когда у нас есть понятный результат. Неопределенность, когда нет понятного результата. Например: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$ – все это неопределенность. Это очень важно, никогда не забывайте про это! Следовательно, у Вас должна быть в тетради вот такая запись (не забудьте нарисовать и рисунок):

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = [2^2] = 4$$

Ну, с этим, в общем, все понятно. Потренируйтесь и посчитайте вот такие вот пределы:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \to 2} x^3; \quad \lim_{x \to 1} x^{(x+2)^2}; \quad \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}}{x^2}$$

То же самое происходит и для случая, когда $x \to +\infty$ или к другому бесконечному числу:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [+\infty^2] = +\infty$$

А вот пример, где есть неопределенность:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Если мы подставим под x значение, равное 0, то вот, что у нас получится: $\left[\frac{0}{0}\right]$. А это неопределенность, следовательно, решать мы не имеем права! Потом я Вас научу, как раскрывать неопределенность. Сейчас же вы должны не забывать про это. Подставили и проверили. Решается? Значит – определенность. Не решается? Ну что же, тогда потом решите. Когда все пройдете.

Давайте перейдем к формальностям, то есть к определениям.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

$\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$

Определение 1 (предел функции по Коши)

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условиям $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

№1. Доказать, что $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Для удобства, давайте сформулируем теорему (по Коши) для нашего случая. Вот, что у нас получится:

Число 0 называется пределом функции $f(x) = \sin x$ в точке 0 (при $x \to 0$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условиям $x \in X$, $0 < |x| < \delta$, выполняется неравенство $|\sin x| < \varepsilon$.

Воспользуемся неравенством $|\sin x| \le |x|\ \forall\, x$. *Зададим произвольное* $\varepsilon > 0$ *и положим* $\delta = \varepsilon$. *Тогда если* $|x| < \delta$, *то* $|\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$. Это и означает (согласно определению функции по Коши), что $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

По этому поводу в принципе объяснить нечего. Что касается $|\sin x| \le |x|$ — это просто нужно запомнить. Что касается ε — это очень маленькое число, находящееся в окрестности.

№2. С помощью "$\varepsilon - \delta$" – рассуждений доказать, что $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Заполнить следующую таблицу:

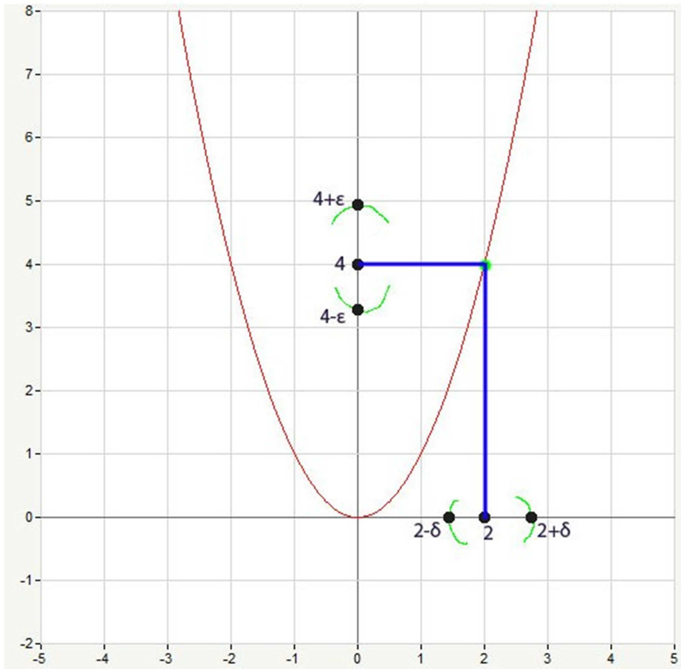
ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ					

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда

$$|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \le |x-2|^2 + 4|x-2| \le \varepsilon,$$

как только $0 < |x-2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}$. Последнее неравенство тем более будет выполняться, если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \delta(\varepsilon) > |x-2|.$$



Так, давайте все-таки рассмотрим этот пример более подробно.

1) *Распишем определение:*

Число 4 называется пределом функции $f(x) = x^2$ в точке 2 (при $x \to 2$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условиям $x \in X$, $0 < |x-2| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

2) *Упростим:*
   a) *Условие:*

$$0 < |x-2| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - 2 < \delta \Leftrightarrow 2 - \delta < x < 2 + \delta$$

   b) *неравенство:*

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \Leftrightarrow 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

3) *Поймем:*

Число 4 называется пределом функции $f(x) = x^2$ в точке 2 (при $x \to 2$), если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условиям $x \in X$, $2 - \delta < x < 2 + \delta$, выполняется неравенство $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$.

Все! Прочтите последнее определение, которое мы написали, используя график. Верно? Ну конечно верно! Этот способ я написал специально для вас, для понимания. Ни в какой литературе вы такого не найдете. Поэтому, если хотите по-настоящему все это быстро решать – пожалуйста! Да, объяснить, как это делается аналитически, я не *уверен, что смогу. Пример я вам написал, теперь вы должны в нем сами разобраться, используя мой графический способ. Все строится от понимания, господа. Сейчас попробую объяснить все на аналитическом уровне.*

№3. Для закрепления.

Доказать, используя определение Коши предела функции, что

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$$

Шаг 1:

Зададим функцию $f(x)$, которая является у нас выражением, стоящим у нас под знаком предела:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

Поскольку мы рассматриваем предел, стремящийся к 4, нужно рассмотреть некоторую окрестность 4-ки, которая для данной функции определена. Например, интервал от 2 до 5.

$$4 \epsilon (2, 5)$$

Но! Заметьте, что функция у нас определена не всюду! Она не определена в 0 и при $x = 4$. Надеюсь, Вы это понимаете, но на всякий случай распишу: $x^2 - 4x \neq 0 \rightarrow x(x-4) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Надеюсь все понятно. Так, отвлеклись, так что быстро идем дальше. Мы можем в принципе рассмотреть любой интервал, но нам такой удобнее $4 \epsilon (2, 5)$.

Шаг 2:

Запишем определение предела функции $f(x)$ по Коши.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \neq 4, |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

Это значит: для любого ε мы должны найти такое δ, что как только x у нас отлично от 4 и x-4 по модулю не превосходит $\delta \Rightarrow |f(x) - 2|$ должно не превосходить ε.

Шаг 3:

Преобразуем выражение $|f(x) - 2|, x \neq 4$.

$$|f(x)-2| = \left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\frac{x+4}{x} - 2\right| = \frac{|x-4|}{x}$$

Эти преобразования нетрудно проделать самостоятельно. Надеюсь, у вас не вызывает это трудности.

Итак, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \forall x \neq 4, |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$ и $|f(x)-2| = \frac{|x-4|}{x}$. Заметьте, информации все больше и больше!

Шаг 4:

Оценим сверху выражение $|f(x)-2|, x \neq 4, x \in (2,5)$.

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{|x-4|}{2}$$

Поняли? Мы оцениваем $\frac{|x-4|}{x}$*, т.к.* $\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \frac{|x-4|}{x}$*. Следовательно,* $\frac{|x-4|}{2} > \frac{|x-4|}{x}$*. Здесь самое главное не запутаться.* $x \in (2,5)$ *—это условие мы поставили еще в начале. Отсюда идет сравнение дробей. Что больше* $\frac{|x-4|}{2}$ *или* $\frac{|x-4|}{x}$*, где* $x \in (2,5)$*. Конечно первая дробь. Где знаменатель меньше, там дробь больше (при одинаковых числителях).*

Шаг 5:

Зададим $\delta = 2\varepsilon$. Здесь мы можем брать и просто ε, може взять и 5ε. В данном случае нам удобнее всего, когда $\delta = 2\varepsilon$.

Итак, вот что мы сейчас имеем:

$$\forall x \in (2,5) \quad 0 < |x-4| < \delta \quad |f(x)-2| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

Вывод:

Все! Мы доказали, что предел равен 2. Вывод один: если хотите решать все это, берите еще раз и решайте. И так до тех пор, пока не поймете. Я попытался описать, как это доказывается аналитически. Можете посмотреть на это все и с графической точки зрения, не забыв все упростить.

Информация:

Вообще, честно говоря, от Вас таких доказательств не должны требовать. Они слишком уж "плавающие". Если Вам все же интересна эта тема, откройте любой *учебник и посмотрите там материал. Соответственно, Вы ничего не поймете, если не напишете собственноручно решение + графики. Это Вам небольшая подсказка. Нарисуйте! И все сразу станет ясно.*

Раскрытие неопределенности (часть 1)!

№1. Я забегаю немного вперед, но хотелось бы решить этот предел:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$$

Если мы подставим 4 под x, у нас получится неопределенность:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]-\text{неопределенность!}$$

Что делать? Все просто. А давайте ка упростим дробь!

$$\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)}=\frac{x+4}{x}$$

Все! Теперь, если мы подставим 4, у нас будет определенность, а, следовательно, мы можем решать.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x}=\left[\frac{8}{4}\right]=2$$

Вывод: ***от неопределенности мы избавляемся с помощью преобразований***.

№2. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16}$$

Здесь все очень просто. Разложим на множители числитель и знаменатель. Рассказываю первый и последний раз, как это делать.

Что бы разложить знаменатель на множители, мы должны приравнять его к нулю и просто решить уравнение. Давайте сделаем это.

$$x^2+6x-16=0$$

Что бы решить квадратное уравнение, прежде всего нужно найти дискриминант по формуле:

$$D=b^2-4ac$$

$a, b, c -$ элементы квадратного уравнения. В общем виде квадратное уравнение выглядит так:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Следовательно, в нашем случае $a = 1, b = 6, c = -16$. Подставляем значения и находим дискриминант:

$$D = 36 + 4 \cdot 1 \cdot 16 = 100$$

Далее находим корни квадратного уравнения, используя формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Подставляем и получаем:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 + 10}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-6 - 10}{2} = -8 \end{cases}$$

Корни нашли, а значит мы очень близки к разложению на множители квадратного многочлена. Сначала запишем формулу:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Заметим, что не всякий многочлен можно так расписать. В данном случае у нас нет никаких противоречий, и, следовательно, это можно делать. Таким образом:

$$x^2 + 6x - 16 = (x - 2)(x + 8)$$

Вот эту вещь вы должны уметь делать очень быстро. Ну, максимум – минута. Так что, если есть проблемы, сразуже их решайте.

В числитиле можно тоже разложить на множители. Это сделать гораздо проще, так как там разность квадратов. Напоминаю формулу:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Таким образом:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

И получаем наш предел:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x - 16} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 8)} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(x + 8)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x + 8} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Как видите, в общем-то решение в одну строчку.

№3. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{(2x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{(2x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{2x-1}=-\frac{3}{3}=-1$$

№4. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}$$

Здесь я вас хочу научить одной хитрой штучке. Как разложить на множители многочлен, у которого степень >2? По дискриминанту мы этого делать не можем – он только для квадратных уравнений. Так что же делать? Объясняю: что бы разложить наш числитель на множители, нам достаточно найти хотя бы один корень. В данном случае нам ничего не остается делать, как подбирать.

$$x^5-x^4+2x^2-5x+3=0$$

Когда равенство верно? Немного подумав, мы отвечаем: когда $x=1$. Верно? Подставьте 1 в уравнение и вы убедитесь в этом. Далее мы имеем право разложить наш многочлен на множители:

$$x^5-x^4+2x^2-5x+3=(x-1)\cdot P(x)$$

$P(x)-$ функция, которую нам предстоит найти. Решаем уравнение относительно $P(x)$. Получаем:

$$P(x)=\frac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x-1}$$

Ну а теперь просто делим одно на другое в столбик!

$$\begin{array}{r|l}
x^5-x^4+2x^2-5x+3 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^5-x^4\qquad\qquad\qquad} & x^4+2x-3=P(x) \\
2x^2-5x+3 & \\
-\;\underline{2x^2-2x\quad} & \\
-3x+3 & \\
-\;\underline{-3x+3} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, наша функция раскладывается так:

$$x^5-x^4+2x^2-5x+3=(x-1)\cdot(x^4+2x-3)$$

То же самое делаем с знаменателем и получаем:

$$x^3+4x^2-7x+2=(x-1)(x^2+5x-2)$$

Итого:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+2x-3)}{(x-1)(x^2+5x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x-3}{x^2+5x-2}=\frac{1+2-3}{1+5-2}=\frac{0}{4}=0$$

№5. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>Определение 2</u> (предел функции по Гейне)

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n\in X$, $x_n\neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Обозначение: $\lim_{x\to a} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to a$.

Предел функции по Гейне редко можно встретить где-нибудь в практике. От Вас требуется лишь одно – выучить его на всякий случай. Может быть и пригодится.

Подчеркнем, что понятие предела функции в точке a вводится только для предельных точек a области определения функции. Отметим, что при этом функция может быть и не определена в точке a, т.е., вообще говоря, a не принадлежит X.

2. Теоремы о пределах

Теорема 1 Определения 1 и 2 предела функции эквивалентны.

Теорема 2 Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a, и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Тогда:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = b+c;$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = b-c$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \text{ при условии } c \neq 0$$

Теорема 3 Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a, и удовлетворяют неравенствам $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$. Тогда $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Здесь, похоже, все понятно. Теоремы выражены четко и ясно, информация должна восприниматься легко. Если что-то не так, не волнуйтесь, примеры нас ждут впереди.

3. Односторонние пределы

Односторонние пределы… Не слишком позитивно звучит, не правда ли? На самом деле все очень просто. На рис. 3 изображён график функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

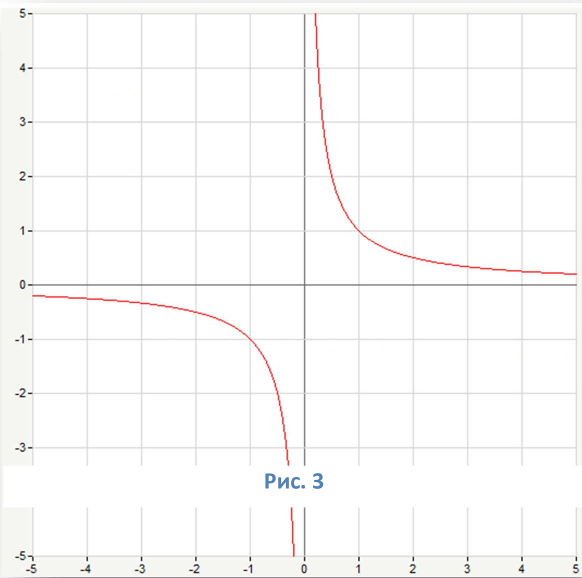


Рис. 3

Давайте попробуем взять пару пределов. Думаю, у нас все получится!

1) Если $x \to 1$.
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{1} - \text{есть определенность}\right] = 1$$
2) Если $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0} - \text{неопределенность}\right]$
Следовательно, мы не имеем права дальше решать, а упростить никак нельзя. Следовательно, предела не существует. Посмотрите на рис. 3 и вы увидите, что функция там не определена, сл. Ни о каком пределе не может быть и речи.

3) Если $x \to 0 + 0$.

Запись $x \to 0 + 0$ в данном случае означает “посмотрите на то, как ведет себя функция справа от 0”. И что мы видим на графике? Функция возрастает в + бесконечность. Поэтому:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0+0} - \text{определенность}\right] = +\infty$$

Понимаете? $0 + 0 > 0$, следовательно, мы уже делим не на ноль. Давайте рассмотрим следующие примеры.

4) Если $x \to 0 - 0$.

Что у нас делает функция слева от 0? Правильно, убывает. Причем убывает к $-\infty$.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0-0} - \text{определенность}\right] = -\infty$$

Ну как вам?

5) Если $x \to +\infty$

Смотрим на график и видим, что функция при $x \to +\infty$ стремится к 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty} - \text{определенность}\right] = 0$$

6) Если $x \to -\infty$

Все то же самое:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-\infty} - \text{определенность}\right] = 0$$

Последние два примера рекомендую запомнить. При раскрытии неопределенности, они нам потом очень понадобятся. Ну что, поняли суть? Ну, тогда формальности…

Определение 1 (предел функции по Коши)

Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X, x_n > a \quad (x_n < a)$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Определение 2 (предел функции по Гейне)

Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющего условиям $x \epsilon X$, $a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В общем, добавить тут и нечего. Полная аналогия с предыдущими определениями по Коши и по Гейне, так что, если вы поняли, как доказываются пределы, то сможете доказать и односторонние. Структура доказательств та же.

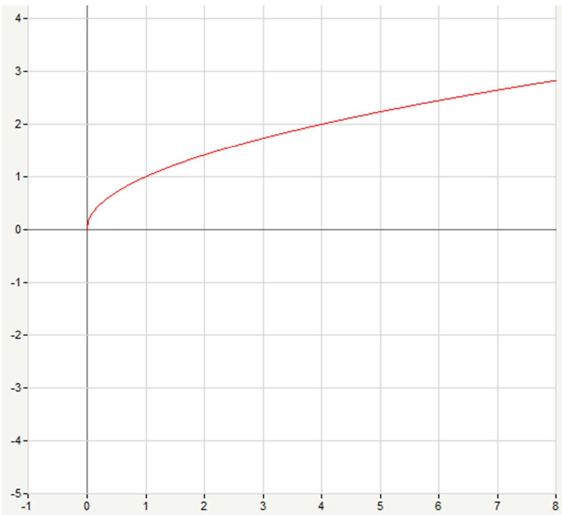
Обозначения:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \ \&\&\ f(a+0) = b$$

Теорема 4 Если существуют $f(a+0)$ и $f(a-0)$, причем $f(a+0) = f(a-0) = b$, то существует $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Теорема 5 Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и существует $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то существуют $f(a+0)$ и $f(a-0)$, причем $f(a+0) = f(a-0) = b$.

Рис. 4



На всякий случай, рассмотрим пример на теорему 4. Давайте рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Она изображена на рис. 4.

Давайте найдем пределы:

$$\lim_{x\to 4+0} \sqrt{x} = \left[\sqrt{4+0} - \text{определенность}\right] = 2$$

Почему 0 ни на что не повлиял? Да потому что ему незачем что-то менять. Функция определена в $x = 4$, следовательно, нет никакой надобности брать $+0$.

$$\lim_{x\to 4-0} \sqrt{x} = \left[\sqrt{4+0} - \text{определенность}\right] = 2$$

Все то же самое. Функция определена в $x = 4$, следовательно, нет никакой надобности брать -0. Этого никто не объясняет, потому что это вполне все логично.

Отсюда, по теореме 4:

$$\lim_{x\to 4+0} \sqrt{x}, \quad \lim_{x\to 4-0} \sqrt{x} - \text{существуют, причем} \lim_{x\to 4+0} \sqrt{x} = \lim_{x\to 4-0} \sqrt{x} = 2$$

Поэтому существует предел $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

Так, это закрепили. А что, если мы рассмотрим $x = 0$?

Ну, давайте проверять:

$$\lim_{x\to 0+0} \sqrt{x} = \left[\sqrt{0+0} - \text{определенность}\right] = 0$$

Этот предел существует. Посмотрите на функцию, и вы увидите, что она там определена.

$$\lim_{x\to 0-0} \sqrt{x} = \left[\sqrt{0-0} - \text{неопределенность}\right] = \text{предел не существует}$$

Запомните раз и на всегда: корень не может быть отрицательным! Поэтому предела не существует! Но зато существует вот что:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \left[\sqrt{0} - \text{определенность}\right] = 0$$

Как видите, теорема 4 работает лишь в одну сторону. В ней нельзя поставить отрицание. Поэтому, друзья, будьте внимательны!

4. Предел функции при $x \to \infty$

Некоторые случаи мы уже рассмотрели (раскрытие неопределенности (часть 1)). ***От неопределенности мы избавляемся с помощью преобразований!*** Запомните это, пожалуйста, и ничего не бойтесь.

А сейчас я Вам хочу поведать одну небольшую тайну: если $x \to \infty$, то в большинстве случаев выражение, находящееся под знаком предела, стоит преобразовывать к формам вида ${}^{c}/_{x}$, где с – число. Почему? Потому что эта дробь всегда будет стремиться к 0! Мы с вами это уже доказали.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$$

Запомните и всегда пользуйтесь этим!

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)=[1+0]=1$$

Ну как вам? Вывод: когда у нас дробь, то мы *выносим → сокращаем → пишем ответ.*

P.S. В квадратных скобках я не буду теперь писать слово определенность☺

№2. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=[0+0+0]=0$$

Круто? Да! Значит, давайте сделаем и еще одно наблюдение: в таких случаях выносим ту же степень, что и в знаменателе. Хотя, если самая высокая степень стоит в числителе, то лучше вынести именно ее. В общем, как вам удобнее. Можно делать и так, и так.

№3. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4)^2}{(x+2)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}-\text{неопределенность}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2+16}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^4+8+\frac{16}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{8}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{8}{x^4}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^4}}=\left[\frac{1}{0}-\text{определенность}\right]$$

$$=\infty$$

№4. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^3}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^3}-2}=\left[\frac{3-0+0}{0+0-2}\right]=-\frac{3}{2}$$

№5. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5x+1}{6x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2x+1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{6}=\infty$$

№6. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x^3+4x^5}{4x^2+x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(\frac{1}{x^6}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x}\right)}{x^6\left(\frac{4}{x^4}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^6}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^4}+1}=\left[\frac{0+0+0}{0+1}\right]=0$$

Еще раз повторяю, когда дробь – тогда выносим!

Настало время поведать вам и вторую тайну. Если нам дано выражение вида $A_1 \pm A_2$, не поленитесь его помножить на $\frac{A_1 \pm A_2}{A_1 \pm A_2}$. Привожу пример:

$$\lim_{x\to\infty}x^2+x=[\infty+\infty-\text{неопределенность}]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)\cdot(x^2+x)}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x+x^2}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^2+\frac{2}{x}+1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=[1]=1$$

Несомненно, в будущем вы так не будете все подробно расписывать. Вам будет достаточно нескольких действий, так что не волнуйтесь.

P.S. Как только встречаете

СОПРЯЖЕННОЕ

$$a-b=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}$$

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}$$

Сложно? Нет! На какой вид похоже? На $A_1 \pm A_2$. Делаем сопряженное.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}\right)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2+3-x^4-x^2}{\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{x^2\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Вот то, что я вам говорил. Вы ВСЕ должны в конечном итоге получать дроби вида $\frac{c}{x^n}$, потому что все они стремятся к 0!!! Продолжаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\left[\frac{7+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}\right]=\frac{7}{2}$$

Страшно? Ну нет же☺. Медленно, не спеша, решайте пределы и вы достигните многого!

№2. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

Страшно☺? Не волнуйтесь, все то же самое. Надо что-то сократить. Что и как? $\sqrt{x}$ –это надо вынести и сократить. Если попытаемся вынести x, то мы с вами просто запутаемся, а ответ от этого не изменится. Разве что может быть неопределенность. То есть выносим х с самой старшей степенью в знаменателе.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\left[\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{0}+\sqrt{\frac{1}{0^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{0}}}\right]=1$$

Трудность может состоять здесь лишь в одном: как вынести $\sqrt{x}$? Надеюсь, что это вы делать умеете.

№3. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$$

Кем бы ни был наш чужак, мы все равно его решим. Для начала давайте, используя теорему 2, разобьем наш предел на два предела. Его так будет намного легче решать, в том смысле, что можно меньше запутаться. Если боитесь разбивать, то сами мучайтесь. ☺

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

Мы просто все упростили для дальнейшей работы с пределами, используя сложение дробей и свойство степени. Теперь у нас два предела. Видим дробь. Как я вас учил? Правильно, видим дробь – умножаем на сопряженное. Так давайте сделаем это вместе.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n$$

Вот, что у нас получилось. Заметьте, делаем то же самое, что и раньше. Отличие лишь в одном – размеры. Теперь надо упростить каждый предел. В числителе у нас разность квадратов.

Упростим первый предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n$$

Первый упростили. Теперь перейдем ко второму:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n$$

Вот, что у нас получилось:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n$$

Видим дробь. Что надо делать? ВЫНОСИТЬ x^2!

Первый предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x\cdot\sqrt{x^2-1}}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}{x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right)^n=\left[\frac{0}{2}\right]^n=0$$

Второй предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-x\cdot\sqrt{x^2-1}}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}{x^2\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right)^n$$

$$=\left[\frac{0}{0}-\text{неопределенность!}\right]$$

Друзья, вот с таким вот вы будете сталкиваться часто, особенно на больших примерах. Что делать? Ответ прост: вернуться и сделать по-другому. Хорошо, что хотя бы первый предел у нас посчитался. Что же, возвращаемся до разбиения лимитов. Вот что у нас было:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

Как решать, если наш способ не подошел? Что делать, если “метод сопряженных” не работает. А давайте сразу попробуем вынести? Выносим со старшей степенью в знаменателе, следовательно это просто x.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n=\left[1+\sqrt{1-0}\right]^n$$

$$=2^n$$

Получается, на самом деле, все было несколько проще.

Итого:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n=0+2^n$$

Все! Ответ: 2^n

Сложно? Я думаю, не очень. Здесь главное аккуратность и настойчивость. Если сразу не получилось, не надо все бросать.

№4. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$$

Здесь у нас x не стремится к бесконечности, но я хочу тем показать, что метод сопряженного действует и здесь.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{3x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{6}$$

№5. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$$

Здесь сделаем еще круче – умножим числитель и знаменатель на выражения сопряженные числителю и знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{(x^2+2-2)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$=\sqrt{2}$$

№6. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)}=\frac{1}{2}$$

Раскрытие неопределенности (часть 2)!

Итак, какой вывод мы можем сделать из всего предыдущего? Ну, во-первых, если вас просят посчитать предел, то уж наверняка, там – неопределенность. Таблички снизу рекомендую вам заучить!!!

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1) Если у нас есть выражение типа $a - b$, и в итоге получается неопределенность, то нам нужно провести вот такую операцию:

$$a - b = \frac{(a-b)(a-b)}{(a-b)},$$

а потом вынести и сократить так, что бы x во всех случаях был в знаменателе.

Пример:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3+x)(x^3+x)}{x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6+2x^4+x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^6\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}} = \left[\frac{1+0+0}{0+0}\right] = \infty$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2) Если у нас есть выражение типа $a - b$, и в итоге получается неопределенность, то нам нужно провести вот такую операцию:

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)},$$

а потом вынести и сократить так, что бы x во всех случаях был в знаменателе.

Пример:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3+x)(x^3-x)}{(x^3-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6-x^2}{x^3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{x^6\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}} = \left[\frac{1-0}{0-0}\right]$$
$$= \infty$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

3) Если у нас есть выражение типа

$$\frac{a \pm b}{c \pm d},$$

То вам нужно либо сразу выносить и сокращать так, что бы x во всех случаях был в знаменателе, либо помножать на сопряженное числителя или знаменателя. В зависимости от ситуации.

Все три выше приведенные пункты вы должны использовать при раскрытии неопределенности, когда $x \to \infty$.

Если x стремится к какому-то другому значению, и у нас неопределенность, то используют просто упрощения (сопряженное или сокращения)

Как видите, мы один и тот же предел посчитали разными способами. Такое получается не всегда!

Все таблицы Вы должны запомнить, как таблицу умножения. Наверное, у многих может возникнуть вопрос: а когда что использовать? Практика, друзья. Другого выхода у Вас нет, и не может быть. Только на собственном опыте Вы можете достигнуть каких-то результатов.

Как всегда, переходим к формальностям (профессорской теории):

***Определение 1** (по Коши)*

Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $(c, +\infty)$.
Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($b = \lim_{x\to+\infty} f(x)$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A > 0\ (a \geq c)$ такое, что $\forall\, x > A$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2 ***(по Гейне)***

Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $(c,+\infty)$.
Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n > c)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

5. Бесконечно большие функции

Определение 1 ***(по Коши)***

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a справа, если $\forall\, M > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условию $x \in X$, $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Обозначение: $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$

Определение 2 ***(по Коши)***

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to +\infty$, если $\forall\, M > 0\ \exists A (A \geq c)$ такое, что $\forall\, x > A \quad |f(x)| > M$.

Обозначение: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

То же самое и для бесконечно малых функций. На мой взгляд, определение нам нужно либо для доказательств, либо… для других целей. По крайней мере, оно мне ни разу не понадобилось.

Итак, мы с вами уже встречали ранее примеры, когда предел был равен ∞. Как видите, они считаются точно также, как и все другие. Ключевую роль здесь играет вот такая конструкция: $[{}^{1}/_{0}]$. Запомните, эта конструкция ВСЕГДА равна ∞!

$$\left[{}^{1}/_{0}\right] = \infty$$

6. Графики элементарных функций

Да, именно это нам сейчас и предстоит. Они нам ОЧЕНЬ понадобятся в будущем. Поэтому, важно их сейчас же закрепить, а заодно и посчитать пределы. Я согласен, это нудно и неинтересно. Если Вы что-то знаете, пропускайте и идите дальше, я разрешаю☺.

$$f(x) = {}^{k}/_{x}$$

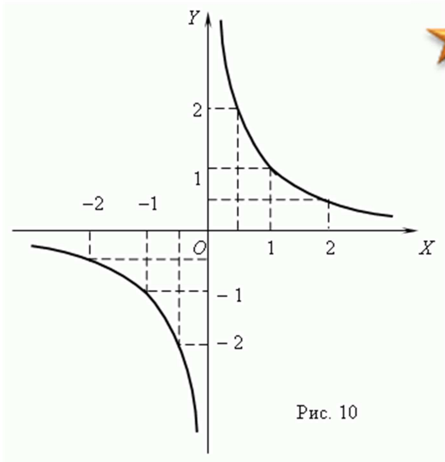


Рис. 10

Итак, это наша первая и самая важная функция. Ранее мы уже успели ее рассмотреть, но давайте повторим то, что уже сделали.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{k}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{k}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{k}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{k}{x} = 0$$

Если хотите, можете запомнить все это, но вообще, я рекомендую вам запомнить сам график. По-моему все довольно ясно.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

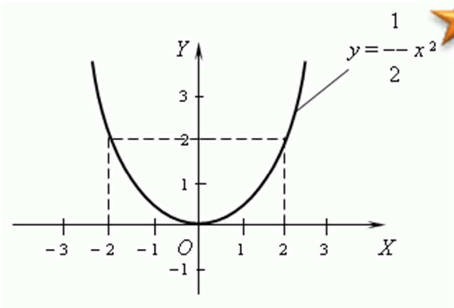


Рис. 11

Ну, эту функцию вы просто обязаны знать, но, на всякий случай я ее напомню. Знаете ли, разные случаи бывают☺.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

$f(x) = a^x$

сам

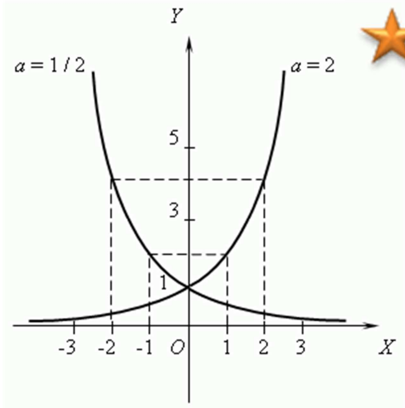


Рис. 17

Функция носит свое название – показательная функция. Здесь важно не забывать об одной вещи:

при $a > 1$ функция возрастает;

при $0 < a < 1$ функция убывает.

Здесь давайте рассмотрим примеры:

№1. Посчитать предел $\langle a > 1 \rangle$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = [2^{+\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = [2^{-\infty}] = 0$$

ЗАЗУБРИТЬ! Вот это вы просто обязаны заучить, потому что графики часто путают между собой.

№2. Посчитать предел $\langle 0 < a < 1 \rangle$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = \left[\frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x} = \left[\frac{1}{2^{-\infty}} = \frac{1}{0}\right] = +\infty$$

Как видите, последние два предела мы просто вывели из предыдущих двух. ЗАЗУБРИТЬ!

$f(x) = \log_a x$

сам

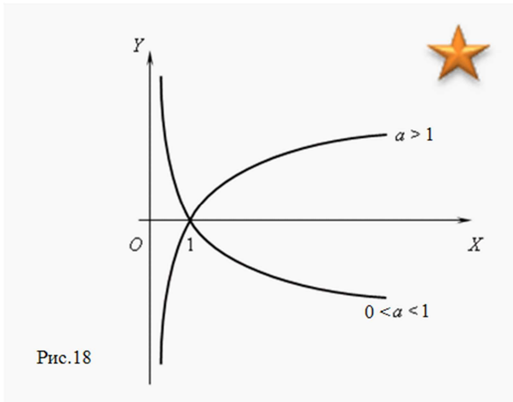


Рис.18

Функция носит свое название – *логарифмическая функция*. Здесь есть тоже два подвоха:

при $a > 1$ функция возрастает;

при $0 < a < 1$ функция убывает.

№1. Посчитать пределы $\langle a > 1 \rangle$

$$\lim_{x\to0+0} \log_2 x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0-0} \log_2 x = \nexists \qquad \lim_{x\to-\infty} \log_2 x = \nexists$$

№2. Посчитать пределы $\langle 0 < a < 1 \ \rangle$

$$\lim_{x \to 0+0} \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-0} \log_{\frac{1}{2}} x = \nexists \qquad \lim_{x \to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = \nexists$$

Уверен, столько всего вы не запомните, так что лучше выучить график. Ok! Идем дальше…

$f(x) = \sin(x)$

сам

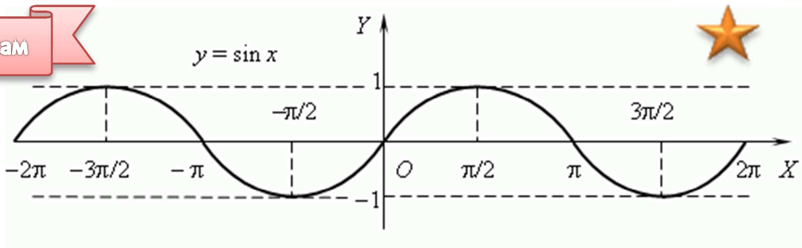


Рис. 19

Функция носит свое название – *синусоида*.

№1. Посчитать предел

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x).$$

Что делать? На графике явно видно, что функция “прыгает” от одного значения до другого. Вывод: не существует такого предела. Давайте просто рассмотрим примеры, где функция стремится к разным значениям:

$$\lim_{x \to k} \sin(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pi} \sin(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \sin(x) = -1 \end{cases};$$

$f(x) = cos(x)$

сам

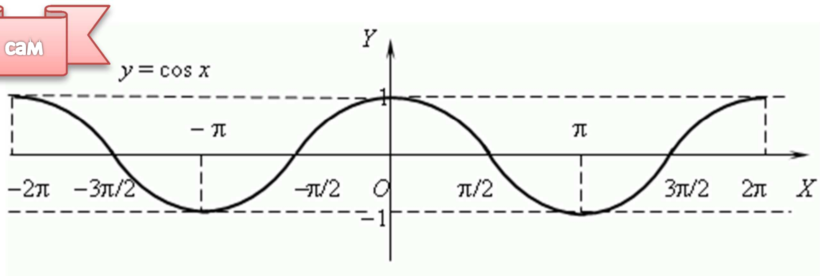


Рис. 20

Проделам то же самое для *косинусоиды*.

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x \to k} \cos(x).$$

Все те же размышления. Предела не существует! Вот, что у нас получается:

$$\lim_{x\to k}\cos(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\pi}\cos(x)=-1;\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1\end{cases}$$

$f(x)=tg(x)$ сам

$f(x)=ctg(x)$ сам

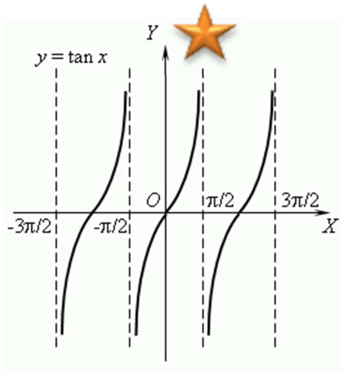


Рис. 21

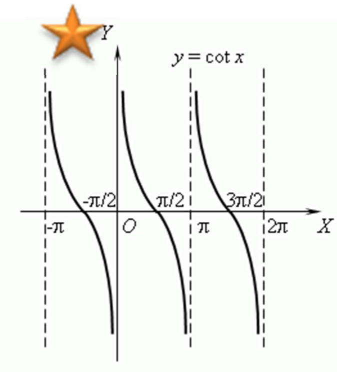


Рис. 22

На рисунке представлены две функции:

$$f(x)=tg(x)\ и\ f(x)=ctg(x).$$

Как видите, они очень похожи, поэтому очень важно, запомните Вы их или нет. Давайте проведем небольшой опыт. Попробуйте запомнить два графика. Как только будете уверены в том, что все выучили, прорешайте все пределы ниже, а потом проверьте себя по графикам.

№1. Посчитать пределы:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}(x)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}(x)\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}(x)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}(x)\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}(x)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}(x)\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg}(x)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{ctg}(x)\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{ctg}(x)$$

$f(x)=\arcsin(x)$ сам

$f(x)=\arccos(x)$ сам

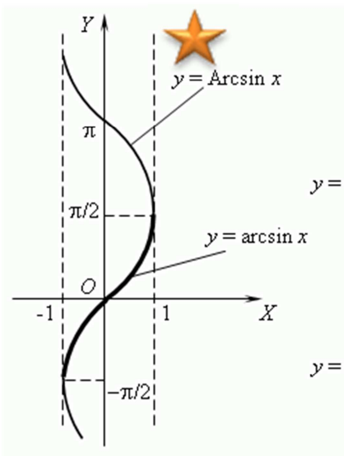


Рис. 23

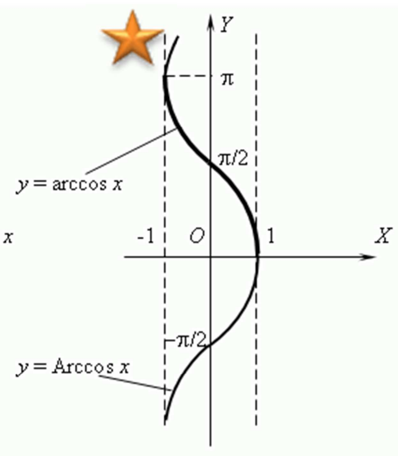


Рис. 24

$f(x)=\arcsin(x)$ – обратная функция к функции $\sin(x)$.

$f(x)=\arccos(x)$ – обратная функция к функции $\cos(x)$.

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 0}\arcsin(x).$$

Давайте посмотрим на график $f(x) = \arcsin(x)$. Что мы видим? При $x \to 0$ функция принимает бесконечно много значений. Например, $\lim_{x\to 0} \arcsin(x) = 0$ и $\lim_{x\to 0} \arcsin(x) = \pi$ и т.д. Делаем вывод: у нашего графика есть период.

$$\lim_{x\to 0} \arcsin(x) = \pi k, \qquad k - \text{целое число, лежащее в промежутке } (-\infty, +\infty)$$

То же самое с $f(x) = \arccos(x)$.

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

$f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$

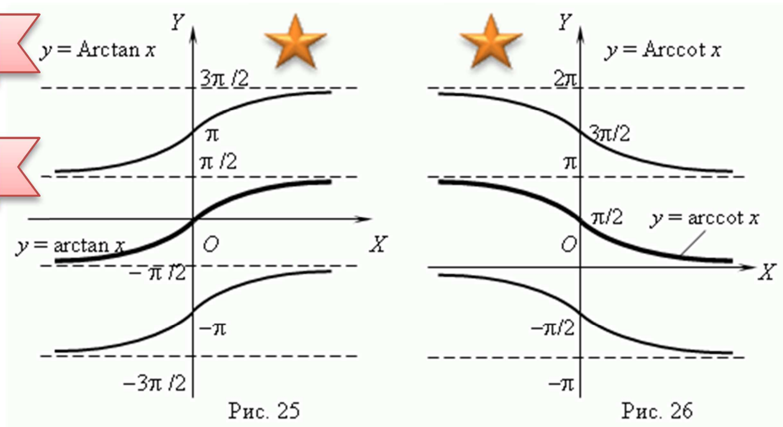


Рис. 25 Рис. 26

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ – обратная функция к функции $\operatorname{tg}(x)$.

$f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$ – обратная функция к функции $\operatorname{ctg}(x)$.

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(x) = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

k – целое число, имеющее шаг 2. Т.е. $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} + \cdots$. Можно записать вот так:

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} k$$

Заметим, что n – это произвольное целое число, которое мы задаем сами.

На этом, мы заканчиваем наш раздел – графики элементарных функций.

От автора:

Поздравляю! Вы смогли завершить первую главу “Предел функции” первой части “Предел и непрерывность функции”. Конечно, это не все. Я рассказал Вам лишь элементарные вещи. Далее нас будут ждать первый замечательный и второй замечательный приделы и другие методы взятия пределов. Если Вы поняли все, что я здесь написал, то дальше будет только интересно! Ничего сверхсложного вас не ожидает…

Глава 2. Непрерывность функции в точке.

Содержание:

1) Непрерывность функции в точке
2) Непрерывность сложной функции
3) Классификация точек разрыва
4) Непрерывность элементарных функций
5) Первый замечательный предел
6) Второй замечательный предел
7) Кратко о Maple

1. *Непрерывность функции в точке.*

Определение 1

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** *a, если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Запомните это определение раз и навсегда! Если вы его не знаете, вы – ничто и никто в математике. Давайте рассмотрим простой пример:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Задание: проверить функцию на непрерывность в точках $x = 1; 0$.

1. $x = 1$. Используя определение 1, получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1 \leftrightsquigarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Выполняется определение 1? Да!

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = f(1) = 1$$

Вывод: функция непрерывна в точке $x = 1$.

2. $x = 0$. Используя определение 1, получаем:

сам

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty \leftrightsquigarrow f(0) = \frac{1}{0} \to \nexists$$

Выполняется определение 1? Нет!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \neq f(0)$$

Вывод: функция не существует в точке $x = 0$.

Определение 2

*Пусть функция $f(x)$ определена в правой (левой) полу окрестности точки a, т.е. на некотором полуинтервале $[a, a+\varepsilon)$ (соответственно $(a-\varepsilon, a]$). Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** (соответственно **слева**) в точке a, если*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \left(\text{соответственно } \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)\right).$$

Здесь то же самое. Пожалуйста, рассмотрите сами такие функции как $\ln x$, $\frac{1}{x}$ и другие. Хотя, думаю, что все предельно ясно.

Теорема 6 *Для того чтобы функция была непрерывна в a, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.*

Теорема 7 *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ также непрерывны в точке a (частное – при условии $g(a) \neq 0$).*

Пример №1.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2}{x}$.

Для начала распишем область определения $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, т.к. знаменатель не может равняться 0. Теперь просто используем теорему 6:

$$\lim_{x\to a} f(x) = a = f(a),$$

где $a \neq 0$. Следовательно, по теореме 6, функция $f(x) = \frac{x^2}{x}$ непрерывна в любой точке, кроме $a = 0$.

2. Непрерывность сложной функции.

Пусть функция $y = \varphi(x)$ определена на множестве X, а Y — множество значений этой функции. Пусть, далее, на множестве Y определена функция $u = f(y)$. Тогда говорят, что на множестве X определена ***сложная функция****, и пишут $u = f(y)$, где $y = \varphi(x)$, или $u = f(\varphi(x))$.*

Впрочем, пока что вам это не сильно понадобиться. Привожу примеры сложных функций:

$$y = \sqrt{|\sin x|}, \quad y = \cos\frac{1}{x}, \quad y = \log_a(x^3 + 1).$$

Почему они сложные? Давайте рассмотрим цепочку последовательных преобразований для первой из них:

$$u = \sin x \Rightarrow v = |u| \Rightarrow y = \sqrt{v}.$$

Вот и все! Теперь перейдем ко второй функции:

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow v = \cos u \Rightarrow y = v.$$

И так далее. Не хочется уделять этому много времени. Надеюсь, вы и так все поняли. Ну что же, перейдем к теореме.

Теорема 8 *Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке a, а функция $u = f(y)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$. Тогда сложная функция $u = f\big(\varphi(x)\big) = F(x)$ непрерывна в точке a.*

Давайте рассмотрим пример на доказательства. Здесь как раз и нужно рассматривать сложную функцию.

<u>Пример №1</u>

Доказать, что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a\,, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Рассмотрим функцию $y = \varphi(x) = a^x - 1$. Она непрерывна в точке $x = 0$ и $y(0) = 0$. При этом

$$x = \log_a(1+y), \qquad \frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)}.$$

Вычислим $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)}$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\ln a}{\ln(1+y)}$$

Этот шаг может быть непонятен, поэтому я должен напомнить вам формулу преобразования к логарифму с другим основанием:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Запомните ее и больше не возвращайтесь к этому. В данном случае $a = e$ — новое основание. Давайте напишем формулу именно для нашего случая:

$$\log_a(1+y) = \frac{\log_e(1+y)}{\log_e a} = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}.$$

Итак, продолжаем:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}.$$

Верно? $\ln a$ — это число, поэтому мы его и вынесли. Теперь нужно посчитать предел $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$.

Представим функцию $\frac{\ln(1+y)}{y}$ в виде $\ln(1+y)^{1/y} = \ln z$ (тоже свойство логарифма!), где $z = (1+y)^{1/y}$.

$$y \cdot \log_a x = \log_a x^y$$

Так как $\lim_{x\to 0}(1+y)^{1/y} = e$ (*Это второй замечательный предел. Пока что мы его не прошли, но, поверьте, равенство верно*), а функция $\ln z$ непрерывна в точке $z = e$, то

$$\lim_{y\to 0} \ln(1+y)^{1/y} = \ln e = 1.$$

Возвращаемся к нашему примеру. И вот, что у нас получается:

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{\ln a}{1}=\ln a.$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, непрерывную в точке $y=0$:

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\log_a(1+y)} & \text{при } y\neq 0\\ \ln a & \text{при } y=0\end{cases}$$

Согласно теореме 8 сложная функция

$$f\big(\varphi(x)\big)=\begin{cases}\dfrac{a^x-1}{x} & \text{при } x\neq 0\\ \ln a & \text{при } x=0\end{cases}$$

Является непрерывной в точке $x=0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Сложно? Может быть, но вы должны в этом разобраться, потому что это очень важно для понимания этой темы. Тем более, здесь требуется внимательность, ну и “немножко подумать”.

3. Классификация точек разрыва.

Для начала, давайте поймем, что вообще означает “*точка разрыва*”. Все предельно просто!

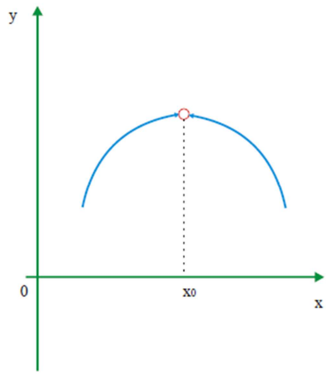
*Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ в этой точке не является непрерывной.*

Прежде чем начинать рассматривать классификацию точек разрыва, вы должны всегда проверять условие: $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Если условие выполняется, то можно рассматривать классификацию точек разрыва.

*Точка $a = x$ – **устранимая точка разрыва**, если*

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$



Пример №1.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

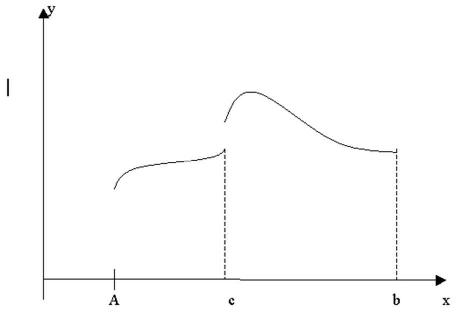
Прежде всего, напишем область определения: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Отсюда сразу видно, что $x = 0$ – необычная точка. В ней функция не определена, но $f(x)$ определена в ее окрестности.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда следует, что $x = 0$ – устранимая точка разрыва.

*Точка $a = x$ – **точка разрыва первого рода**, если*

$$\exists \lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$$

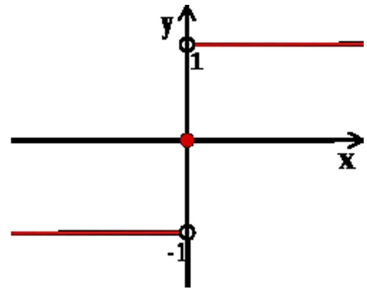


Пример №1.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

Функция $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ уже должна быть ранее вам известна, но я вам ее напомню.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



f(x) = sgn(x)

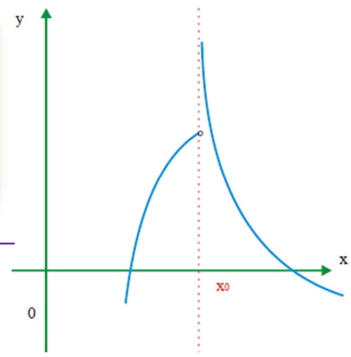
$\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn}(x) = -1,$

$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn}(x) = 1,$

$f(0) = 0.$

Отсюда следует, что $\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(x)$ $\Longrightarrow$ точка $x = 0$ – точка разрыва первого рода.

*Точка $a = x$ – **точка разрыва второго рода**, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.*



Пример №1.

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

Прежде всего, напишем область определения $D(x) = R \backslash \left\{\frac{1}{2} + \pi k\right\}, k \in Z$.

$$\lim_{x_k \to \frac{\pi}{2} + \pi k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{x_k \to \frac{\pi}{2} + \pi k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$$

Т.к. хотя бы один из пределов равен бесконечности, то $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – точка разрыва второго рода.

Пример №2.

$$y = \ln x$$

Прежде всего, напишем область определения $D(y) = (0;\ +\infty)$.

$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to 0-0} \ln x = \nexists$$

Т.к. хотя бы один из пределов не существует, то $x = 0$ – точка разрыва второго рода.

Итак, мы теперь знаем классификацию точек разрыва. Мы рассмотрели примеры к каждому случаю. Они достаточно легкие, поэтому давайте еще попрактикуемся. Во всех следующих номерах определить точки разрыва.

P.S. Для начала попробуйте сделать это сами, ну а потом проверьте себя. Удачи ☺!

№1.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

Смотрим пределы:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1.$$

Вывод:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) \neq \lim_{x \to 1-0} f(x)$$

Ответ: В т. $a = 1$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.

№2.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

Прежде всего, напишем **область определения**: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = \left[e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = 0\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = \nexists.$$

Ответ: $x = 0$ — предельная точка второго рода.

№3.

$$y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-4}}}$$

Прежде всего, напишем **область определения**: $x - 4 \neq 0 \Longrightarrow D(y) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-4}}} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2 + 3^{-\infty}} = \left[\frac{1}{2+0}\right] = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 4+0} \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-4}}} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2 + 3^{+\infty}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

Ответ: $x = 4$ — точка разрыва первого рода.

№4.

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$$

Прежде всего, напишем **область определения**. Критические точки определяем вот так:

$$x^2 - x^3 \neq 0 \Longrightarrow x^2(1 - x) \neq 0.$$

Критические точки: $x = 0$ и $x = 1$. Теперь напишем область определения $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x-1|}{x^2 - x^3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

Вывод: $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{x^2 - x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2 - x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{-x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2}=1$$

Вывод: $x=1$ – точка разрыва первого рода.

Ответ: $x=0$ – точка разрыва второго рода, $x=1$ – точка разрыва первого рода.

№5.

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$$

Прежде всего, напишем **область определения**: $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}$$

Точка разрыва устранимая:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3}, x\neq -1\\ \dfrac{1}{3}, x=-1\end{cases}$$

Ответ: Она непрерывна в точке разрыва и на $D=R$.

№6.

$$y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$$

Что бы найти критические точки, нужно упростить функцию.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\frac{(x-1)x}{x(x+1)}$$

Точки: $x=0;1;\ -1$.

Смотрим пределы:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-1-\text{устранимый разрыв.}$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\infty-\text{разрыв второго рода.}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0-\text{устранимый разрыв.}$$

№7.

сам

$$y = \frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}} = 1$$

Смотрим пределы и получаем:

$$x \neq \frac{2}{2k+1} - \text{устранимые точки разрыва.}$$

$$x \neq 0 - \text{точка разрыва второго рода.}$$

Думаю, примеров достаточно. Если вы сами все это про решаете, то тему вы знать будете на 100%. Ну что же, надеюсь, это было не слишком скучно. По крайней мере, столько разобранных примеров вы не найдете нигде.

4. Непрерывность элементарных функций

Мы с вами эту тему уже разобрали в 1 главе, 6 пункте. Там мы рассматривали графики элементарных функций и считали пределы. Сейчас перейдем к формальностям и "профессорской теории".

Как вы заметили, в моей книге присутствует эта "теория". Зачем? Все просто, - хочется, что бы вы не только принимали разжеванное, но и сами пытались разжевать. Если я уберу эту "теорию", то мои труды пойдут насмарку. Конечно, вы будете уметь что-то решать, но вы не будете понимать, что да как. Поэтому прошу вас учить теорию! Она обязательно понадобиться вам в ближайшем будущем. Ну что же, это было лирическое отступление ☺. Перейдем к небольшой теории.

Функции $y = C = const$, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ *называются* ***простейшими*** *(или* ***основными****)* ***элементарными функциями****.*

Совокупность всех элементарных функций называется ***классом элементарных функций****.*

Функция называется ***элементарной****, если она может быть получена с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций над простейшими элементарными функциями.*

Теорема 9

Любая элементарная функция, определенная в окрестности некоторой точки, непрерывна в этой точке.

На этом "профессорская теория" заканчивается, и мы переходим к замечательным пределам.

5. *Первый замечательный предел*

Очень важная тема! В ней мы будем учиться искать пределы. Вы должны набить руку на этом, и у меня к вам просьба: перед тем, как смотреть решение, попытайтесь сами чего-то добиться.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Зазубрите это раз и навсегда! И никогда не забывайте эту формулу!

Доказывать я ее не собираюсь, если хотите, поищите в интернете, там она точно есть. Ну что же, переходим к примерам.

№1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}.$$

Решение:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}},$$

Ура! Внизу появился замечательный предел.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \left[\frac{1}{1}\right] = 1.$$

Легко? Безусловно…

№2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin x}.$$

Решение:

Сделаем замену переменной: пусть $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$ и база $x \to 0$ переходит в базу $y \to 0$ (просто подставьте $x \to 0$ под $\arcsin x$). На самом деле это проще записывать вот так:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \left[\begin{matrix} y = \arcsin x \leftrightsquigarrow x = \sin y \\ x \to 0 \leftrightsquigarrow y \to 0 \end{matrix}\right] = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \left[\frac{1}{1}\right] = 1.$$

Запомните этот способ замены переменной. Он может сильно пригодиться вам в будущем.

№3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\arcsin x}}=\begin{bmatrix} y=\arcsin x \leftrightsquigarrow x=\sin y \\ x\to 0 \leftrightsquigarrow y\to 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\left[\frac{1}{1}\right]=1.$$

№4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

Решение:

Преобразуем функцию следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right).$$

Вынесем постоянный множитель за знак придела и применим теорему о пределе произведений:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}$$

Делаем замену, как и в предыдущем примере:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=$$

$$=\left(\begin{matrix} 2x=t \leftrightsquigarrow \sin 2x=\sin t \\ x\to 0 \leftrightsquigarrow t\to 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 3x=r \leftrightsquigarrow \sin 3x=\sin r \\ x\to 0 \leftrightsquigarrow r\to 0 \end{matrix}\right)=\frac{2}{3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{r\to 0}\frac{1}{\frac{r}{\sin r}}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

№5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}.$$

Умножим и разделим знаменатель на 4 и подведем выражение под знаком предела к первому замечательному пределу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{4\cdot\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}=\left(\begin{matrix} \frac{x}{4}=t \leftrightsquigarrow x=4t \\ x\to 0 \leftrightsquigarrow t\to 0 \end{matrix}\right)=\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{4}.$$

№6.

сам

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^2}.$$

Представим тангенс через синус и косинус и воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos^2\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\begin{pmatrix}\frac{x}{2}=t\leftrightsquigarrow x=2t\\ x\to 0\leftrightsquigarrow t\to 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\right]=1.$$

Видите, здесь немного посложнее, но в принципе, все одно и тоже. Если вы выучили элементарные функции, то это вам не должно показаться сложным.

сам

№7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\operatorname{tg}x}.$$

По формулам двойных углов имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x\operatorname{tg}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x=[2\cdot 1\cdot 1]=2.$$

Господа, учим тригонометрические формулы! Они вам все равно понадобятся.

Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$
$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

Основные формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$tg\, 2\alpha = \frac{2\, tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$
$$ctg\, 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2\, ctg\,\alpha}$$

Формулы преобразования суммы функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Формул много, но желательно их все выучить.

№8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{8\sin^3\frac{x}{4}}.$$

Умножим и разделим числитель на 4 в кубе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{8\sin^3\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{4^3\left(\frac{x}{4}\right)^3}{8\sin^3\frac{x}{4}}=8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{\sin^3\frac{x}{4}}=\left(\begin{matrix}\frac{x}{4}=t \leftrightsquigarrow x=4t\\ x\to 0 \leftrightsquigarrow t\to 0\end{matrix}\right)=8\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{\sin^3 t}=8\cdot 1=8.$$

№9.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+1}.$$

В знаменателе мы можем сделать квадрат разности, а потом, как всегда, перейти к новой переменной. Тогда предел будет стремится к 0, и, следовательно, мы можем применить первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}=\left(\begin{matrix}x-2=t \leftrightsquigarrow x=t-2\\ x\to 2 \leftrightsquigarrow t\to 2-2=0\end{matrix}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1^2=1.$$

№10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}.$$

На основании одной из теорем о пределах, мы можем данный предел разделить на два предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$$
$$=\left(\begin{matrix}3x=t \leftrightsquigarrow x=\frac{t}{3}\\ x\to 0 \leftrightsquigarrow t\to 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}4x=r \leftrightsquigarrow x=\frac{r}{4}\\ x\to 0 \leftrightsquigarrow r\to 0\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}+\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{7}{6}.$$

№11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}.$$

Преобразуем числитель с помощью формул разности косинусов двух углов и синуса двойного угла:

$$\cos x-\cos 3x=2\sin 2x\sin x=4\sin^2 x\cos x,$$

тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x=4\lim_{x\to 0}\cos x=4.$$

6. Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется предел вида

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Доказывать это мы с вами тоже не собираемся. Быть может, когда-нибудь я напишу отдельно книгу про все доказательства, но пока что не будем тратить на это время и сразу перейдем к примерам.

Как только вы видите скобку в степени x, значит прежде всего пробуйте ее свести ко второму пределу. Первые номера рассмотрим крайне подробно.

№1. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x}$$

Видим скобку в степени $5x$, следовательно пробуем свести к второму замечательному пределу. Сначала сведем то, что внутри к форме $1+\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{5x}$$

Теперь нужно “поиграть” со степенью. Т.е. нам нужен вид типа $x/4$. Почему? Формулу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

можно было бы представить в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{1}}=e.$$

В данном случае у нас вместо единицы – четверка. Значит, вот, что у нас получается:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}.$$

Что бы уж полностью свести к нашей формуле данный придел, мы обозначим $x=4t$. Тогда получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=\begin{Bmatrix} x=4t \leftrightsquigarrow t=\dfrac{x}{4} \\ x\to\infty \leftrightsquigarrow t\to\infty \end{Bmatrix}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{20}=e^{20}.$$

Как видите, ничего сложного здесь нет. Алгоритм работы весьма просто: приведение дроби к виду $1+\frac{P}{x}\Longrightarrow$ приведение степени к виду $\frac{x}{P}\cdot M\Longrightarrow$ замена переменной $\Longrightarrow$ а далее просто считаем по формуле. Если запутались, не волнуйтесь. Мы еще успеем разобрать массу примеров ☺.

№2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+3x}$$

Действуем так же, как и в прошлый раз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{1+3x}$$

Здесь мы степень выделять будем после замены переменной. В данном случае, это проще, чем попытаться свести к второму пределу до замены. На результат это никак не повлияет.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{1+3x}=\begin{Bmatrix} x=t-1 \leftrightsquigarrow t=x+1 \\ x\to\infty \leftrightsquigarrow t\to\infty \end{Bmatrix}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t-2}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}=e^{3}\cdot 1=e^{3}.$$

Как видите, ничего сверхестественного здесь нет. Отсюда можно написать алгоритм решения, подобный прошлому. Приведение дроби к виду $1+\frac{P}{x}\Longrightarrow$ замена переменной$\Longrightarrow$ приведение степени к виду $\frac{x}{P}\cdot M\Longrightarrow$ а далее просто считаем по формуле.

№3. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right)^{2x+3x^2}$$

Выделим целую часть в скобках:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right)^{2x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+3}{x^2+2}\right)^{2x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+2}\right)^{2x+3x^2}$$
$$=\begin{Bmatrix} x^2+2=3t \leftrightsquigarrow t=\dfrac{x^2+2}{3} \\ x\to\infty \leftrightsquigarrow t\to\infty \end{Bmatrix}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{9t-4}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{9}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-4}=e^{9}\cdot\left[1+\frac{1}{0}\right]^{-4}=e^{9}.$$

Пример полностью аналогичен предыдущему. Если вы поняли, как “это работает”, то вы молодцы и можете смело идти дальше. Большой плюс здесь заключается в том, что достаточно знать лишь несколько методов, что бы решить тот или иной предел.

№4. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x}\right)^{3-2x}$$

Выделим целую часть в скобках:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x}\right)^{3-2x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}\right]^{3-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3-2x}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}$$
$$= \left\{\begin{matrix} t=-\frac{1}{x} \leftrightsquigarrow x=-\frac{1}{t} \\ x\to\infty \leftrightsquigarrow t\to 0\end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{2}{t}+3}\right]\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{2^3} = e^2\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{8} = \infty$$

Далее не хочется так подробно рассматривать каждый пример, иначе каждое решение будет занимать более половины страницы. Главное, чтобы вы поняли общую идею, и стремились к идельному решению, т.е. короткому. Дам еще один совет, попробуйте для начала сами что-то решить, а потом уже проверяйте, верно ли вы сделал ли или нет.

№5. Посчитать предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = [1^\infty - indefinite] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1$$
$$= e$$

№6. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} = [1^\infty - indefinite] = \lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^3 = e^3$$

№7. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}-indefinite]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=e^{2}$$

№8. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=[1^{\infty}-indefinite]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}$$

№9. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=[1^{\infty}-indefinite]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4(x+3)}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+12}{x-1}}=e^{4}$$

№10. Посчитать предел:

$$\lim_{x\to\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}(x-4)\ln\frac{2-3x}{5-3x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x-4}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{-3}{5-3x}\right)^{\frac{5-3x}{-3}-\frac{7}{3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln e=1.$$

№11. Посчитать пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^x$$

Должен сказать, примерчик этот уже чуть интереснее предыдущих.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1}{x^2+3}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1-x^2-3}{x^2+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^x$$

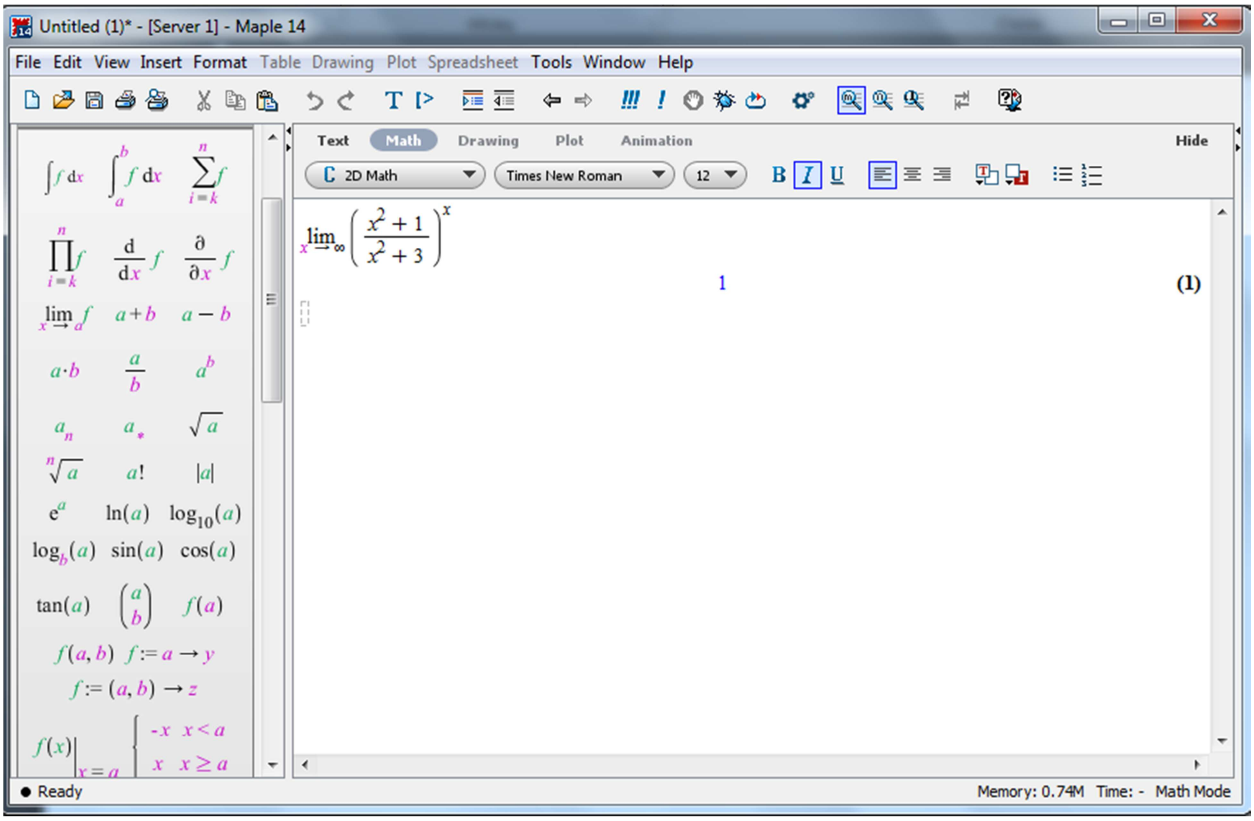
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^{x^2+\frac{3}{-2}\cdot\frac{-2}{x^2+3}\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^{x^2+\frac{3}{-2}}\right]^{-\frac{2x}{x^2+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+3}} = e^0$$

$$= 1$$

На этом я предлагаю закончить второй замечательный предел. Далее, в конце книги вы сможете найти массу заданий на эту тему. Разумеется, ответы будут прилагаться.

7. Кратко о Maple

Так же хотелось бы сделать заметку по поводу электронного вычисления пределов. Есть такая программа – Maple, и там пределы считаются просто на «ура».



Как видите, слева, в окошке есть шаблоны формул. Просто на них нажимаете и заполняете данными. Нажимаете на Enter и получаете ответ. На скриншоте для примера посчитан наш последний предел. Зачем нужна вам эта программа? Для проверок. Посчитали предел на бумаге, получили ответ. Вбили формулу в программе и проверили. На самом деле очень удобная штука.

От автора:

Поздравляю! Вы смогли завершить вторую главу “Непрерывность функции в точке” первой части части “Предел и непрерывность функции”. Впереди вас ждет сравнение бесконечно малых функций, символ “$\underline{O}$ малое” и его свойства, вычичление пределов функций с помощью асимптотических формул и вычисление пределов показательно-степенных функций. Темы будут весьма важны, поэтому будут рассматриваться не только “технические” примеры, но так же примеры и на доказательства. На этой ноте я хочу вам пожелать успехов!

До скорой встречи! Искренне Ваш, Виосагмир И.А.

Глава 3. Бесконечно малые функции.

Содержание:

1) Сравнение бесконечно малых функций
2) Свойства символа “о малое”
3) Сравнение бесконечно малых функций

1. Сравнение бесконечно малых функций.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ (в точке a), если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции при $x \to a$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются:

a. *Бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$ (в точке a), если*
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0;$$

b. *Эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$ (в точке a), если*
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \text{ (обозначение: } \alpha \sim \beta \text{ при } x \to a).$$

Если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечной малой более высокого порядка* при $x \to a$ (в точке a), чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$ (α равно “o малое” от β при $x \to a$).

Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

Аналогичные определения имеют место для случаев $x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to \infty$.

Следует иметь в виду, что равенства, содержащие символ “o малое”, являются условными. Например, равенство $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$ верно, но $o(x) = x^2$ неверно, поскольку символ $o(x)$ обозначает не какую-то конкретную функцию, а любую функцию, являющуюся при $x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем x. Таких функций бесконечно много, в частности, любая функция x^p (где $p > 1$) есть $o(x)$ при $x \to 0$. Таким образом, равенство $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$ означает, что функция x^2 принадлежит множеству бесконечно малых функций более высокого порядка при $x \to 0$, чем x. Поэтому “в обратную сторону” это равенство ($o(x) = x^2$) неверно: все множество функций $o(x)$ не сводится к одной функции x^2.

Ничего не понятно ☺? Не волнуйтесь, дале мы все рассмотрим на примерах. Но теория в любом случае нужна, иначе моя книга перестает быть математической, и становится непонятно чем.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ (в точке a), если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Рассмотрим несколько примеров, соответствующих данной теме.

№1. Верно ли равенство $2x^2 = o(x)$ при $x \to 0$?

Решение:

$2x^2 = o(x)$ – верно, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x} = 0.$$

Как видите, решение в одну строчку. Давайте его разберем более подробно ☺. Вспомним наше определение!

Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечной малой более высокого порядка* при $x \to a$ (в точке a), чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$ при $x \to a$ (α равно “o малое” от β при $x \to a$).

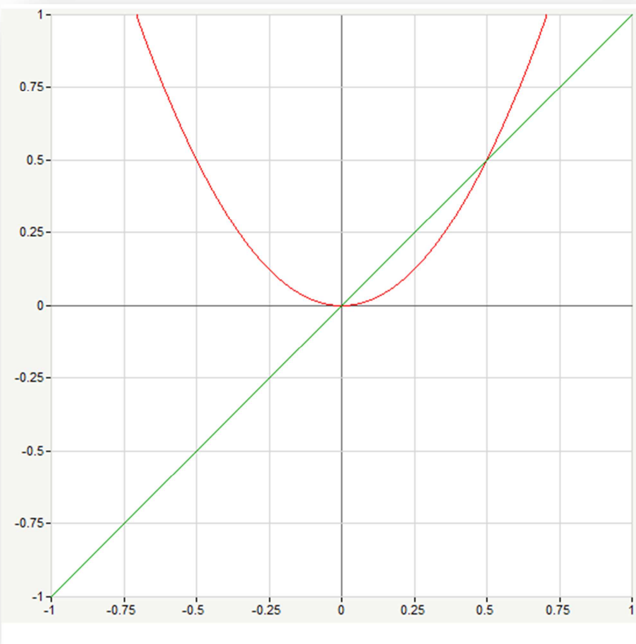
В нашем случае, мы обозначаем за $\alpha(x) = 2x^2$. Далее нам нужно от куда-то “выкопать” $\beta(x)$. Посмотрим в определении на слова пишут $\alpha = o(\beta)$. Отсюда следует, то, что $\beta(x) = x$, судя по нашему примеру $2x^2 = o(x)$.

Далее следуем просто определению, т.е. выписываем предел и проверяем, равен ли он нулю или нет.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Предел равен нулю, следовательно $\alpha(x) = 2x^2$ является *бесконечной малой более высокого порядка* при $x \to 0$ (в точке 0), чем $\beta(x) = x$, и пишут $2x^2 = o(\beta)$ при $x \to a$.

Так же построим для наглядности наши графики функции. Красный график – это наша «главная» функция $\alpha(x) = 2x^2$, а зеленый график – это функция $\beta(x) = x$. По картинке видно, что ближе к нулю функция $\alpha(x) = 2x^2$ стремится к нему быстрее, чем $\beta(x) = x$.



Все! Мы с вами разобрали очень подробно этот пример. Далее все примеры будут идентичными, поэтому так подробно я решение писать не буду.

Во всех остальных случаях красный график – это функция $\alpha(x)$, а зеленый - $\beta(x)$.

№2. Верно ли равенство $3x = o(x)$ при $x \to 0$?

Решение:

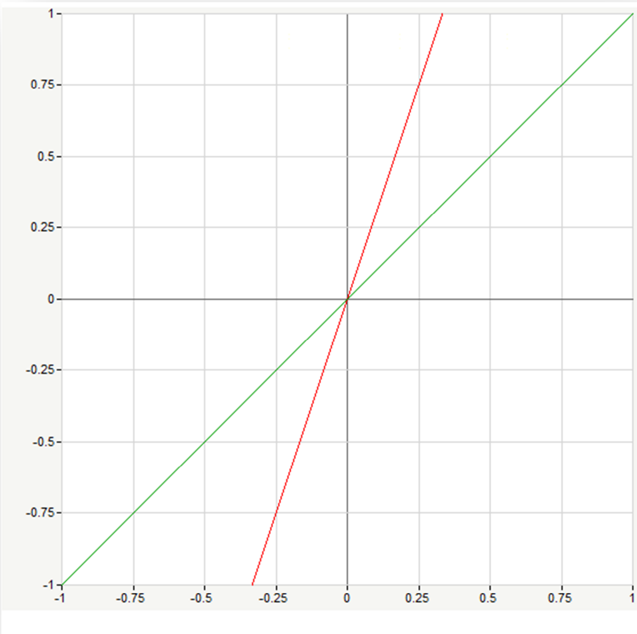
Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = 3x, \beta(x) = x$$

Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3 \neq 0$$

Предел не равен нулю, следовательно равенство $3x = o(x)$ неверно. Но! Так как предел равен константе, то функции $3x$ и x — бесконечно малые одного порядка в точке $x = 0$.



№3. Верно ли равенство $\sqrt{|x|} = o(x)$ при $x \to 0$?

Решение:

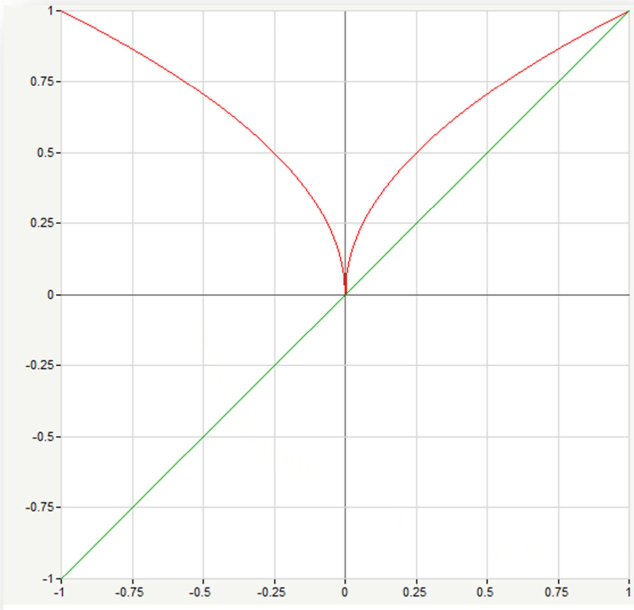
Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = \sqrt{|x|}, \qquad \beta(x) = x$$

Теперь смотрим предел:

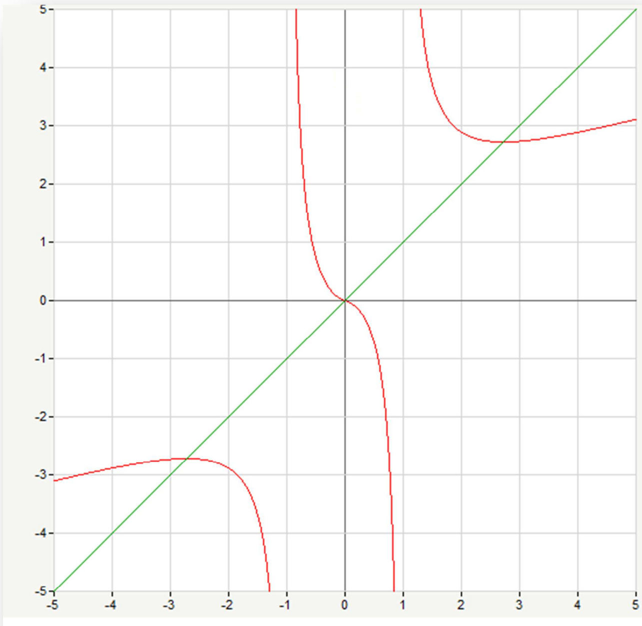
$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sqrt{|x|}}}{\cancel{\sqrt{|x|}} \cdot \sqrt{|x|}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \neq 0$$

Предел не равен нулю, следовательно равенство $\sqrt{|x|} = o(x)$ неверно.



№4. Верно ли равенство $\frac{x}{\ln|x|} = o(x)$ при $x \to 0$?

Решение:



Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = \frac{x}{\ln|x|}, \qquad \beta(x) = x$$

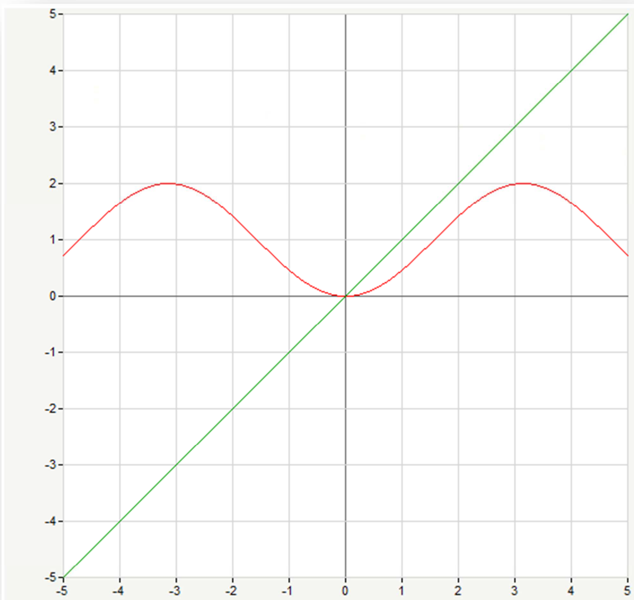
Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{\ln|x|}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln|x|} = 0$$

Предел равен нулю, следовательно равенство $\frac{x}{\ln|x|} = o(x)$ верно.

№5. Верно ли равенство $1 - \cos x = o(x)$ при $x \to 0$?

Решение:



Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = 1 - \cos x\,, \qquad \beta(x) = x$$

Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x}{2} = [1\cdot 0]$$

$$= 0$$

Предел равен нулю, следовательно равенство $1 - \cos x = o(x)$ верно.

P.S. Решение таких пределов у вас уже

не должно вызывать сложностей. Если чувствуете, что не справляетесь, лучше вернуться в главу 1 и 2 и все повторить. Все пределы таких типов у нас уже были. Это, как говорится, база, без которой никуда. Так как примеры все идентичны между собой, сначала решайте их сами, а потом смотрите на решение. Если так делать не будете, то ничему не научитесь!!!

№6. Верно ли равенство $\sin^2 x = o(x^2)$ при $x \to 0$?

Решение:

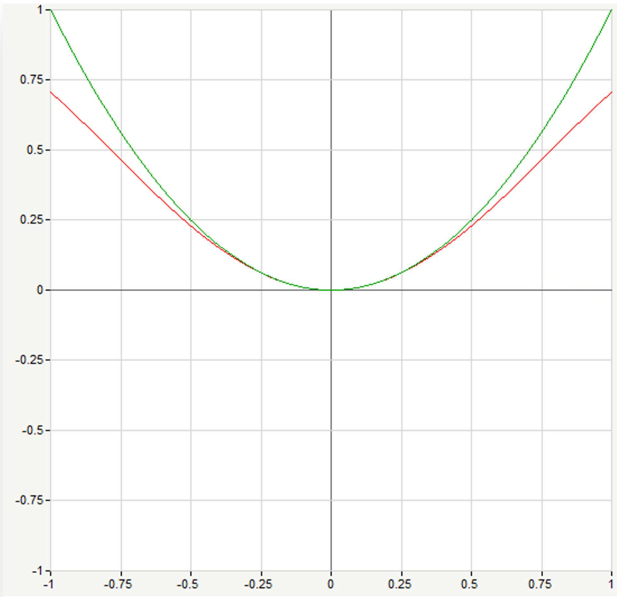
Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = \sin^2 x\,, \qquad \beta(x) = x^2$$

Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = [1^2] = 1$$

Предел не равен нулю, следовательно равенство $\sin^2 x = o(x^2)$ неверно. Но! Так как предел равен единицы, то функции $\sin^2 x$ и x^2 — эквивалентные бесконечно малые в точке $x = 0$.



№7. Верно ли равенство $x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$?

Решение:

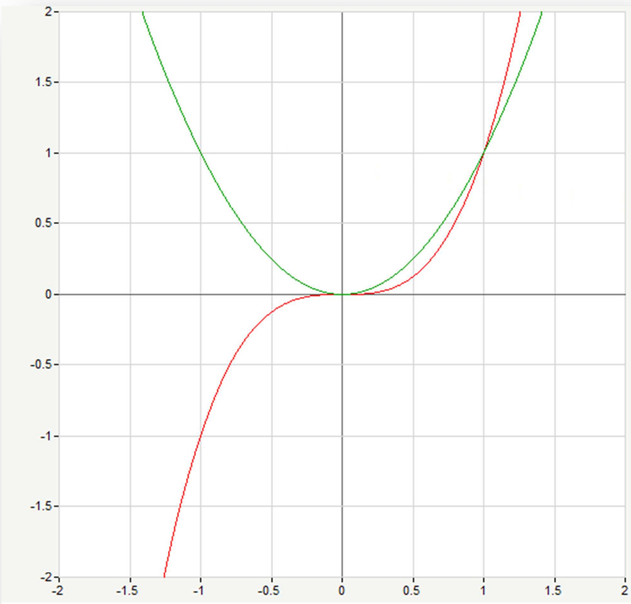
Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = x^3, \qquad \beta(x) = x^2$$

Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = 0$$

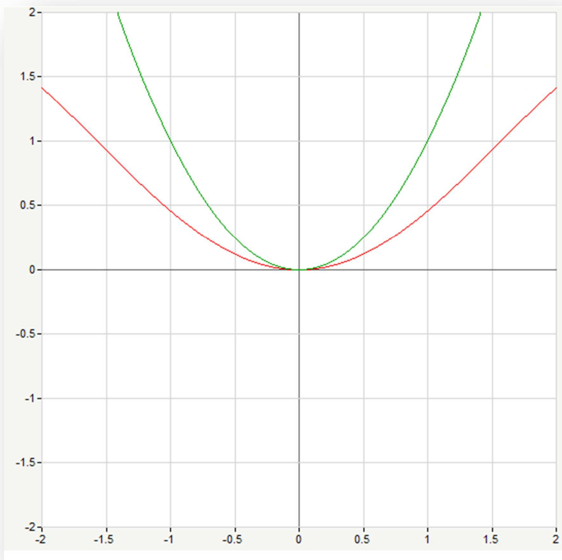
Предел равен нулю, следовательно равенство $x^3 = o(x^2)$ верно.



№8. Верно ли равенство $1 - \cos x = o(x^2)$ при $x \to 0$?

сам

Решение:



Для начала выпишем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Вот, что у нас получится:

$$\alpha(x) = 1 - \cos x\,, \qquad \beta(x) = x^2$$

Теперь смотрим предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Предел не равен нулю, следовательно равенство $1 - \cos x = o(x^2)$ неверно. Но! Так как предел равен константе, то функции $1 - \cos x$ и x^2 –

бесконечно малые одного порядка в точке $x = 0$.

2. Свойства символа “о малое”.

Теорема 10 *Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – две произвольные бесконечно малые при $x \to a$ функции такие, что $\alpha_1(x) = o(\beta)$ и $\alpha_2(x) = o(\beta)$. Тогда $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = o(\beta)$ при $x \to a$.*

Эту теорему можно записать так:

$$o(\beta) + o(\beta) = o(\beta).$$

Сформулируем наряду с указаным еще ряд свойств символа “o малое” (всюду имеется ввиду, что $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $x \to a$).

1. $o(\beta) + o(\beta) = o(\beta)$
2. $o(\beta) - o(\beta) = o(\beta)$
3. $o(c\beta) = o(\beta)\ \forall c \neq 0$
4. $co(\beta) = o(\beta)\ \forall c \neq 0$
5. $o(\beta^n) = o(\beta^k), n \geq 2\ (n \in N), k = 1,2, \dots, n-1$
6. $\left(o(\beta)\right)^n = o(\beta^n)\ \forall n \in N$
7. $\beta^n o(\beta) = o(\beta^{n+1})\ \forall n \in N$
8. $\frac{o(\beta^n)}{\beta} = o(\beta^{n-1}), n \geq 2\ (n \in N)$

Обозначим любую бесконечно малую при $x \to a$ функцию символом $o(1)$. Тогда свойство 8 будет справедливо также при $n = 1$: $\frac{o(\beta)}{\beta} = o(1)$.

9. $\mathrm{o}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^k\right) = \mathrm{o}(\beta)$, где c_k – числа
10. $o\left(o(\beta)\right) = o(\beta)$
11. $o\left(\beta + o(\beta)\right) = o(\beta)$
12. $\alpha\beta = o(\alpha), \alpha\beta = o(\beta)$
13. *Если* $a \sim \beta$, *то* $\alpha - \beta = o(\alpha)$ *и* $\alpha - \beta = o(\beta)$

На сей ноте теория заканчивается и начинается практика. Рекомендую все свойства выучить. В дальнейшем они нам сильно пригодятся.

Первая задача будет очень подробно разобрана. Следующие задачи вы должны будете сделать сами, что бы “вникнуть” в эту тему.

№1. Используя предел $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ представить функцию $\sin x$ в виде

$\psi(x) = a_0 + a_1 x^k + o(x^k)$ при $x \to 0$, где $k = 1$ или $k = 2$; a_0 и a_1 – некоторые числа.

Решение:

Докажем сначала, что если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ —бесконечно малые одного порядка при $x \to a$, т.е. $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, то $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ при $x \to a$.

В самом деле, так как

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \to \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - c\right) = 0 \to \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x) - c\beta(x)}{\beta(x)} = 0,$$

То по определению символа $o(\beta)$ имеем $\alpha(x) - c\beta(x) = o(\beta)$, или

$$\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta) \text{ при } x \to a.$$

Пользуясь данным равенством, получаем

$$\sin \mathrm{x} = x + o(x) \text{ при } x \to 0,$$

Последняя формула называется *асимптотической формулой* функции $\sin x$ при $x \to 0$. Последнее слагаемое в правой части этой формулы $o(x)$ называется *остаточным членом* асимптотической формулы.

Далее, в последующих примерах, мы не будем доказывать одно и тоже и будем исходить из уже доказанного, т.е. $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ при $x \to a$. Поэтому рекомендую прочесть доказательство еще раз, и самое главное, понять его.

№2. Используя предел $\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{x}^2} = \frac{1}{2}$ представить функцию $\sin \mathrm{x}$ в виде

$\psi(x) = a_0 + a_1x^k + o(x^k)$ при $x \to 0$, где $k = 1$ или $k = 2$; a_0 и a_1 — некоторые числа.

Решение:

Используем формулу $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ при $x \to a$ и получаем:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ при } x \to 0.$$

Последняя формула называется *асимптотической формулой* функции $\cos x$ при $x \to 0$. Последнее слагаемое в правой части этой формулы $o(x)$ называется *остаточным членом* асимптотической формулы.

№3. Используя предел $\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{x}} = 1$ представить функцию $\sin \mathrm{x}$ в виде

$\psi(x) = a_0 + a_1x^k + o(x^k)$ при $x \to 0$, где $k = 1$ или $k = 2$; a_0 и a_1 — некоторые числа.

Решение:

Используем формулу $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ при $x \to a$ и получаем:

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Последняя формула называется *асимптотической формулой* функции $\ln(1+x)$ при $x \to 0$. Последнее слагаемое в правой части этой формулы $o(x)$ называется *остаточным членом* асимптотической формулы.

№4. Используя предел $\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{n}}$ представить функцию $\sin \mathrm{x}$ в виде

$\psi(x) = a_0 + a_1 x^k + o(x^k)$ при $x \to 0$, где $k = 1$ или $k = 2$; a_0 и a_1 — некоторые числа.

сам

<u>Решение:</u>

Используем формулу $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ при $x \to a$ и получаем:

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Последняя формула называется *асимптотической формулой* функции $\sqrt[n]{1+x}$ при $x \to 0$. Последнее слагаемое в правой части этой формулы $o(x)$ называется *остаточным членом* асимптотической формулы.

Я думаю, для вас этого будет достаточно. В институте или колледже этому почти не уделяется времени. На сей раз я хотел, что бы вы поняли, откуда берется это “o малое”, и как выводятся асимптотические формулы. Как говорится, немножко теории вам не помешает и, конечно, желательно понимать, что от куда берется.

3. Асимптотические формулы

Ранее были уже получены асимптотические формулы для простейших элементарных функций при $x \to 0$. Запишем эти формулы в виде таблицы.

1) $\sin x = x + o(x)$
2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$
3) $\ln(1+x) = x + o(x)$
4) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)\ (a > 0)$
5) $e^x = 1 + x + o(x)$
6) $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$
7) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$
8) $\operatorname{sh} x = x + o(x)$
9) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
10) $\operatorname{th} x = x + o(x)$

Асимптотические формулы

Указанные формулы остаются справедливыми, если в них вместо аргумента x подставить x_n, где $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, либо $y(x)$, где $\lim_{x\to a} y(x) = 0$. Например, спарведливо представление, вытекающее из первой формулы:

$$\sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $\left\{o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ – бесконечно малая последовательность более высокого порядка, чем $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

То есть этим мы хотим сказать, что если $\left\{\sin\frac{1}{n^2}\right\} \to 0$, то мы можем применить к синусу асимптотическую формулу.

Например, функция $y(x) = x - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$, поэтому из третьей формулы получаем равенство

$$\ln\big(1 + y(x)\big) = y(x) + o(y) \text{ при } x \to 1,$$

или

$$\ln(1 + (x - 1\,)) = x - 1\ + o(y) \text{ при } x \to 1.$$

Вот вам и еще один пример. Используя прошлое равенство и вторую формулу, запишем асимптотическое представление функции $\cos\ln x$ при $x \to 1$.

Функция $\ln x$ при $x \to 1$ стремится к нулю, следовательно является бесконечно малой, следовательно можно применить асимптотическую формулу номер три:

$$\cos \ln x = \cos(x - 1 + o(x - 1)).$$

Функция $\cos(x - 1 + o(x - 1))$ при $x \to 1$ стремится к нулю, следовательно является бесконечно малой, следовательно можно применить асимптотическую формулу номер два:

$$\cos \ln x = \cos(x - 1 + o(x - 1)) = 1 - \frac{\big(x - 1 + o(x - 1)\big)^2}{2} + o\left(\big(x - 1 + o(x - 1)\big)^2\right).$$

Вот теперь нам и пригодятся свойства “o малое”. Применяем их и получаем:

$$\frac{\big(x - 1 + o(x - 1)\big)^2}{2} = \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)o(x-1) + \frac{1}{2}\big(o(x-1)\big)^2$$
$$= \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 + o(x-1)^2 = \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2.$$

Первое, что мы сделали, это раскрыли числитель – там квадрат суммы. Далее мы просто применяем свойства “o малое”. Если не учили их, посмотрите в таблице, которую я давал ранее.

Аналогично,

$$\big(x - 1 + o(x - 1)\big)^2 = (x-1)^2 + o(x-1)^2.$$

Применяем асимптотическое свойство номер 11. Получаем:

$$o\left(\big(x - 1 + o(x - 1)\big)^2\right) = o((x-1)^2 + o(x-1)^2) = o(x-1)^2.$$

Окончательно получаем

$$\cos \ln x = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 \text{ при } x \to 1.$$

Так же мы можем записать наше решение и так:

$$\lim_{x \to 1} \cos \ln x = \lim_{x \to 1}\left(1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2\right).$$

Теперь вы понимаете, зачем нам нужны эти асимптотичесие формулы! Как бы вы по другому искали этот предел? Запомните, если функция стремится к нулю, мы всегда ее можем заменить асимптотическими формулами. Если же она не стремится к нулю, а, например к какой-нибудь константе или бесконечности, мы не имеем права использовать асимптотические формулы!!!

Асимптотические формулы применяются лишь в том случае, когда функция стремится к 0!

Давайте посчитаем наш предел:

$$\lim_{x\to 1}\cos\ln x = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2\right) = \left[1 - \frac{(1-1)^2}{2}\right] = 1.$$

Сложно? Нет! Запутанно? Да! Но что же поделаешь, практика здесь определенно нужно. Думаю, через несколько минут вам будет уже все понятно. Переходям к примерам. Так же как и всегда, первый разобран подробно, остальные примеры решайте сначала сами, а потом смотрите решение.

№1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 3x}.$$

Решение:

Для начала смотрим, можно ли применить асимптотические формулы. Вспоминае, кагда их можно применять? Когда функция стремится к нулю. Проверяем:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+4x) = [\ln 1] = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\sin 3x = [\sin 0] = 0$$

Все верно! Значит применяем формулы. В данном случае это

$$\ln(1+m) \sim m, \quad \sin m \sim m.$$

Так как пример очень простой, “o малое” мы здесь можем не писать. Если хотите, можете использовать его. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Как видите, все очень просто.

№2. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}.$$

Решение:

Так как $\left\{\sqrt[3]{1+x}-1\right\} \to 0$ и $\{x\} \to 0$ при $x \to 0$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\sqrt[3]{1+x} \sim 1 + \frac{x}{3}, \quad x = x.$$

То есть,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x}{3} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}.$$

№3. Найти предел:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos t)}{\sin^2 t^2}.$$

Решение:

Так как $\{1 - \cos(1 - \cos t)\} \to 0$ и $\{\sin^2 t^2\} \to 0$ при $t \to 0$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\cos t \sim 1 - \frac{t^2}{2}, \quad \sin t \sim t.$$

То есть,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos t)}{\sin^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\left(1 - 1 + \frac{t^2}{2}\right)}{(\sin t)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\frac{t^2}{2}}{(t^2)^2}$$

Пример упростился, но нам этого недостаточно. Поэтому, так как $\left\{1 - \cos\frac{t^2}{2}\right\} \to 0$ и $\{(t^2)^2\} \to 0$ при $t \to 0$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\cos t \sim 1 - \frac{t^2}{2}.$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos t)}{\sin^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\left(1 - 1 + \frac{t^2}{2}\right)}{(\sin t)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos\frac{t^2}{2}}{(t^2)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2}\right)}{t^4}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^4/8}{t^4} = \frac{1}{8}.$$

№4. Найти предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x + 3x^2} - 1}{x}.$$

Решение:

Так как $\left\{\sqrt{1 + 2x + 3x^2} - 1\right\} \to 0$ при $x \to 0$, то можем применять асимптотические формулы.

$$(1 + x)^a \sim 1 + ax.$$

В данном случае, $a = 1/2$. Поэтому вот что у нас получится:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{2x+3x^2}{2}-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x+3x^2}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(2+3x) = \left[\frac{1}{2}\cdot 2\right] = 1.$$

№5. Найти предел:

сам

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{x-e}.$$

Решение:

Так как $\{\ln(\ln x)\} \to 0$ при $x \to e$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\ln(1+m) \sim m.$$

Таким образом получаем:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x+1-1)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln[1+(\ln x-1)]}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}$$
$$= \lim_{x\to e}\frac{\ln\dfrac{x}{e}}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e} = \left\{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right] \to 0 \text{ при } x\to e\right\}$$
$$= \lim_{x\to e}\frac{\dfrac{x}{e}-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\dfrac{x-e}{e}}{x-e} = \frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e} = \frac{1}{e}.$$

Скажу честно, что предел не из простейших. Запутаться здесь достаточно легко, поэтому, если вы, “чайник”, взяли этот предел, то вы уже далеко не тот, кем вы были до прочтения этой книги. Вы уже средний студент хорошего института!

№6. Найти предел:

сам

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-1}{x-2}.$$

Решение:

Так как $\{\log_2 x-1\} \to 0$ при $x \to 2$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\ln(1+m) \sim m.$$

Получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-\log_2 2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\log_2\dfrac{x}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{\ln x/2}{\ln 2}}{x-2} = \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\ln x/2}{x-2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]}{x-2} = \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x}{2}-1}{x-2} = \frac{1}{2\cdot\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2} = \frac{1}{2\cdot\ln 2}.$$

№7. Найти предел:

сам

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^4-1}.$$

Решение:

Так как $\{\sin(x-1)\}\to 0$ при $x\to 1$, то можем применять асимптотические формулы. Для синуса у нас есть вот такая формула:

$$\sin x \sim x.$$

Следовательно, перейдем к новой переменной. Пусть $x-1=t$. Тогда $t\to 0$ при $x\to 1$. Предел становится равным

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(t+1)^4-1}$$

Далее испольльзуем алгебраическое тождество:

$$(t+1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1$$

Таким образом находим предел:

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(t+1)^4-1}=[\sin t\sim t]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t(t^3+4^2+6t+4)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3+4^2+6t+4}=\frac{1}{4}.$$

№8. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}.$$

Решение:

Так как $\{\ln\cos x\}\to 0$ и $\left\{\sqrt[3]{1+x^2}-1\right\}\to 0$ при $x\to 0$, то можем применять асимптотические формулы.

$$\sqrt[k]{1+a}\sim 1+\frac{a}{k},\quad \ln(1+a)\sim a.$$

Тогда предел можно записать в виде

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1]}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2/3}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\left[1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\right]=-3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{3}{2}.$$

№9. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\ln\cos 3x}.$$

Решение:

Свиду жуткий примерчик, не правда ли? Не волнуйтесь ☺! Мы всегда все преодолеваем. Давайте так же в этом примере будем использовать “o малое”, для того, что бы наш ответ был уж точно правильным.

Запишем асимптотическое разложение числителя, пользуясь асимптотическими формулами для синуса и тангенса и свойствами “o малое”:

$$\sin\sin\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\sin\sin\left(\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)=\sin\left[\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)+o\left(\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right]$$
$$=\sin\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2)\right)=\sin\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Здесь мы пользовались тем, что $o\left(\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)=o(x^2)$ и $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.

Выведем теперь асимптотическое разложение знаменателя, используя асимптотические формулы для косинуса и логарифма:

$$\ln\cos 3x=\ln\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+o((3x)^2)\right)$$
$$=\ln\left(1+\left(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)=\left(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)+o\left(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$=-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2)=-\frac{9x^2}{2}+o(x^2).$$

Здесь мы вольспользовались тем, что

$$o((3x)^2)=o(x^2),\quad o\left(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)=o(x^2),\quad o(x^2)+o(x^2)=o(x^2).$$

Таким образом данный предел равен

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\ln\cos 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}}=-\frac{1}{9}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что, по определению символа “o малое”

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0.$$

От автора:

Должен сказать, что если вы все-таки достигли этой страницы, то вы не чайник! Вы уже вполне образованный человек, которы хорошо разбирается в пределах фунций. Я попытался объяснить вам данную тему как можно более понятно. Надеюсь, мне это удалось сделать. Далее вас будет ждать большая и очень важная тема. Это – произвидные и дифференциалы. Потом, в моих планах стоит тема «неопределенный интеграл», далее – «основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях». Но это все пока что в планах. Данную часть я написал и весьма доволен этим. Наверняка, в книге, присутствуют как граматические ошибки, так и математические (потеря знака). Прошу об этом писать мне на почту…

Удачи!

С Уважением, Ваш Виосагмир И.А.

viosagmir@gmail.com