МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Сборник индивидуальных заданий по курсу

Пермь – 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М 34

Авторы: Логинова В.В., Морозов Е.А., Морозова А.В.,
Новоселов А.В., Плотникова Е.Г.
Под общ. ред. д-ра пед. наук, профессора Е.Г. Плотниковой.

М 34 **Математический анализ:** сб. инд. заданий: по курсу учеб. пособие / В.В. Логинова, Е.А. Морозов, А.В. Морозова, А.В, Новоселов, Е.Г. Плотникова; под общ. ред. Е.Г. Плотниковой; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2011. – 284 с.: 7 табл.

ISBN 978-5-7944-1653-4

Сборник содержит наборы индивидуальных заданий по основным разделам курса математического анализа. Каждое задание сопровождается примером решения с необходимыми методическими указаниями. Предлагаемые наборы индивидуальных заданий могут использоваться для организации как аудиторной, так и внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

Сборник составлен на основе многолетнего опыта работы авторов и апробирован на практических занятиях по математическому анализу в Пермском государственном университете и в Национальном исследовательском университете Высшая школа экономики – Пермь.

Предназначено для студентов и преподавателей вузов.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пермского государственного университета

Рецензенты: А.Р. Абдуллаев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высш. матем. Перм. гос. техн. ун-та.; каф. матем. анализа Перм. гос. пед. ун-та.

ISBN 978-5-7944-1653-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельная работа учащихся является важным фактором усвоения математики и ее методов. Настоящий сборник предназначен для развития и активизации самостоятельной работы студентов, он составлен на основе многолетнего опыта работы авторов и апробирован на практических занятиях по математическому анализу в Пермском государственном университете и в Национальном исследовательском университете Высшая школа экономики – Пермь.

Сборник содержит наборы индивидуальных заданий по основным разделам курса математического анализа: введение в математический анализ (Морозова А.В.); дифференциальное исчисление функции одной переменной (Логинова В.В.); интегральное исчисление функции одной переменной (Новоселов А.В.); дифференциальное исчисление функции нескольких переменных (Плотникова Е.Г.); интегральное исчисление функции нескольких переменных; числовые и степенные ряды (Морозов Е.А.). Каждое задание сопровождается примером решения с необходимыми методическими указаниями.

Предлагаемые наборы индивидуальных заданий могут использоваться для организации как аудиторной, так и внеаудиторной работы. Сборник будет интересен студентам и преподавателям вузов.

При подготовке сборника авторы пользовались следующей литературой:

[1]. *Кузнецов Д.В.* Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.

[2]. *Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С.* Сборник задач по математике. Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1999. – 495 с.

[3]. *Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Мн.: Вышейшая школа, 1990. – Ч.1, Ч.2. – 272 с.

ТЕМА 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Числовая последовательность

Задание 1

Для заданной числовой последовательности доказать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Выяснить является ли последовательность монотонной, ограниченной и определить грани.

1. $a_n = \dfrac{3n-5}{2n+1},\ a = \dfrac{3}{2}$

2. $a_n = \dfrac{n+2}{3n-1},\ a = \dfrac{1}{3}$

3. $a_n = \dfrac{5n+2}{2n+3},\ a = \dfrac{5}{2}$

4. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+5},\ a = \dfrac{2}{3}$

5. $a_n = \dfrac{7n+2}{3n+8},\ a = \dfrac{7}{3}$

6. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+5},\ a = 2$

7. $a_n = \dfrac{2n+5}{4n-1},\ a = \dfrac{1}{2}$

8. $a_n = \dfrac{5n-3}{3n+2},\ a = \dfrac{5}{3}$

9. $a_n = \dfrac{8n+3}{5n-2},\ a = \dfrac{8}{5}$

10. $a_n = \dfrac{n-4}{2n+6},\ a = \dfrac{1}{2}$

11. $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2},\ a = \dfrac{2}{3}$

12. $a_n = \dfrac{4n+3}{5n-1},\ a = \dfrac{4}{5}$

13. $a_n = \dfrac{3n-4}{7n+1},\ a = \dfrac{3}{7}$

14. $a_n = \dfrac{5n+8}{3n-2},\ a = \dfrac{5}{3}$

15. $a_n = \dfrac{2n+7}{n+4},\ a = 2$

16. $a_n = \dfrac{3n-1}{8n-3},\ a = \dfrac{3}{8}$

17. $a_n = \dfrac{7n-4}{n+8},\ a = 7$

18. $a_n = \dfrac{3n-2}{n+3},\ a = 3$

19. $a_n = \dfrac{5n+3}{4n-1},\ a = \dfrac{5}{4}$

20. $a_n = \dfrac{3n+1}{7n-2},\ a = \dfrac{3}{7}$

21. $a_n = \dfrac{4n-1}{n+5},\ a = 4$

22. $a_n = \dfrac{3n}{4n+1},\ a = \dfrac{3}{4}$

23. $a_n = \dfrac{2n}{5n-3},\ a = \dfrac{2}{5}$

24. $a_n = \dfrac{2n}{8n-5},\ a = \dfrac{1}{4}$

25. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+7},\ a = 3$

26. $a_n = \dfrac{7n}{2n+3},\ a = \dfrac{7}{2}$

27. $a_n = \dfrac{4n+1}{3n-1},\ a = \dfrac{4}{3}$

28. $a_n = \dfrac{5n-2}{6n+1},\ a = \dfrac{5}{6}$

29. $a_n = \dfrac{4n}{n+2},\ a = 4$

30. $a_n = \dfrac{2n+7}{6n-1},\ a = \dfrac{1}{3}$

31. $a_n = \dfrac{6n+5}{n+7},\ a = 6$

32. $a_n = \dfrac{5n}{8n+5},\ a = \dfrac{5}{8}$

33. $a_n = \dfrac{n}{7n-3},\ a = \dfrac{1}{7}$

34. $a_n = \dfrac{8n+4}{3n-2},\ a = \dfrac{8}{3}$

Пример выполнения задания 1

Для заданной числовой последовательности доказать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Выяснить является ли последовательность монотонной, ограниченной и определить грани.

$a_n = \dfrac{2n-1}{4n+1},\ a = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Во-первых, докажем, что последовательность $a_n = \dfrac{2n-1}{4n+1}$ имеет предел, равный $\dfrac{1}{2}$.

По определению число $a = \dfrac{1}{2}$ является пределом числовой последовательности $a_n = \dfrac{2n-1}{4n+1}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех членов последовательности $\{a_n\}$ с номера $n > N$ будет верно неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right)$.

Решим неравенство

$$\left|\frac{2n-1}{4n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{2(2n-1)-(4n+1)}{2(4n+1)}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{-3}{8n+2}\right| < \varepsilon,$$

т.к. $n \in N \Rightarrow \left|\dfrac{-3}{8n+2}\right| = \dfrac{3}{8n+2}$, тогда

$$\frac{3}{8n+2} < \varepsilon,$$

$$8n+2 > \frac{3}{\varepsilon},$$

$$8n > \frac{3}{\varepsilon} - 2,$$

следовательно, номер $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{3}{8\varepsilon} - \dfrac{1}{4}\right] + 1$.

То есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{3}{8\varepsilon} - \frac{1}{4}\right] + 1$, начиная с которого будет выполнено неравенство $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Это означает, что искомая последовательность $a_n = \frac{2n-1}{4n+1}$ имеет предел, равный $\frac{1}{2}$.

Проверка. Допустим $\varepsilon = 0{,}1$ тогда

$$N(\varepsilon = 0{,}1) = \left[\frac{3}{8 \cdot 0{,}1} - \frac{1}{4}\right] + 1 = [3{,}5] + 1 = 3 + 1 = 4.$$

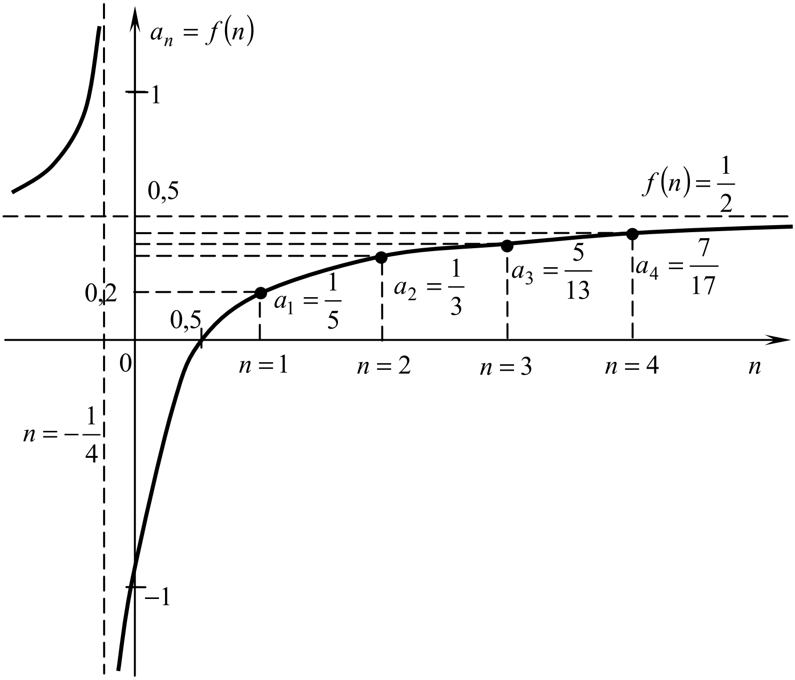
Значит, начиная с четвертого элемента $a_4 = \frac{2 \cdot 4 - 1}{4 \cdot 4 + 1} = \frac{7}{17}$, все элементы данной числовой последовательности будут принадлежать ε-окрестности числа $\frac{1}{2}$: $\left(-\varepsilon + \frac{1}{2};\ \varepsilon + \frac{1}{2} \right)$.

При $\varepsilon = 0{,}1$ ε-окрестность имеет вид $\left(-0{,}1 + \frac{1}{2};\ 0{,}1 + \frac{1}{2} \right)$ или $(0{,}4;\ 0{,}6)$.

Легко заметить, что $a_4 = \frac{7}{17} \in (0{,}4;\ 0{,}6)$ (и все последующие $a_5,\ a_6, \ldots \in (0{,}4;\ 0{,}6)$), а конечное число элементов a_1, a_2 и a_3 не принадлежат ε-окрестности числа $\frac{1}{2}$.

Во-вторых, выясним, является ли последовательность $a_n = \frac{2n-1}{4n+1}$ монотонной. Для этого удобнее воспользоваться графической интерпретацией. Построим функцию $f(n) = \frac{2n-1}{4n+1}$, графиком которой является гипербола (см. рис.).

На графике точками отметим элементы числовой последовательности ($a_1 = \frac{1}{5}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; и т.д.). Из графика нетрудно заметить, что данная последовательность является монотонно возрастающей $(a_1 < a_2 < a_3 < \ldots)$.



Докажем это аналитически. По определению последовательность $a_n = \dfrac{2n-1}{4n+1}$ является возрастающей, если каждый ее элемент, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. для любого номера $n\,(n \in N)$ выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$. Докажем последнее неравенство:

$$\frac{2(n+1)-1}{4(n+1)+1} > \frac{2n-1}{4n+1}, \quad \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{2n-1}{4n+1} > 0,$$

$$\frac{(2n+1)(4n+1)-(2n-1)(4n+5)}{(4n+5)(4n+1)} > 0, \quad \frac{11}{(4n+5)(4n+1)} > 0.$$

Последнее неравенство для любого $n \in N$ всегда справедливо, следовательно, данная последовательность является монотонной (монотонно возрастающей). Также по графику (см. рис.) легко увидеть, что данная последовательность является ограниченной: сверху последовательность ограничена числом $\frac{1}{2}$ $\left(\sup(a_n)=\frac{1}{2}\right)$; снизу последовательность ограничена числом $\frac{1}{5}$ $\left(\inf(a_n)=\frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4n+1}=\frac{1}{2}$; последовательность является монотонно возрастающей, ограниченной; верхняя грань: $\sup(a_n)=\frac{1}{2}$; нижняя грань: $\inf(a_n)=\frac{1}{5}$.

1.2. Характеристики функции

Задание 1

Найти область определения заданных функций.

1. $y=\arcsin\frac{2-x}{x-4}+x\cdot 2^{\frac{x^2}{x+1}}$

2. $y=\ln\left(3+2x-x^2\right)+\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-2}}$

3. $y=\arccos\frac{1-x}{x+2}-e^{\sqrt{4-x}}$

4. $y=\operatorname{arctg}\frac{3-x}{x+4}+\sqrt{\frac{x-1}{9x-20-x^2}}$

5. $y=\log_2\frac{3x+1}{2x-3}-\sqrt[5]{\frac{x}{12+x-x^2}}$

6. $y=\arcsin\frac{x+4}{2x+3}-\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{x^2+3x}$

7. $y=\lg\left(3x^2+5x-8\right)+\frac{x}{4-x^2}$

8. $y=\arccos\left(3-x^2\right)-\sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$

9. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2x^2-3x-5}+\sqrt[4]{\frac{1-4x}{x^2+x-6}}$

10. $y=\log_3\left(x^3+8\right)-\arccos\frac{x^2}{x-2}$

11. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{2x-5}{10-3x-x^2}+\sqrt{\dfrac{4x-8}{3+6x}}$

12. $y = \ln\dfrac{x+6}{6-x}-e^{\sqrt{80+2x-x^2}}$

13. $y = \arcsin\dfrac{2x-8}{x+2}+\sqrt[5]{\dfrac{4+3x-x^2}{x-2}}$

14. $y = \log_5\left(2x-5x^2+16\right)-(2x+1)\cdot 3^{\frac{2x}{x-1}}$

15. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{4x-3}{3x^2-4x-7}+\sqrt{\dfrac{3x-2}{6+5x-x^2}}$

16. $y = \arccos\dfrac{4x-1}{2-x}-e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}$

17. $y=\ln\left(7x^2-4x-20\right)-\operatorname{arcctg}\dfrac{3x+1}{4x-x^2}$

18. $y = 5^{\sqrt{12+4x-x^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{2x-7}{x-x^3}}$

19. $y=\arcsin\left(x^2-8\right)+2^{\sqrt{2-3x}+\sqrt[3]{x+1}}$

20. $y=\log_6\left(14+5x-x^2\right)-\sqrt[7]{\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x}}$

21. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^2-3x-2}{9x-x^3}-\sqrt[4]{\dfrac{x^2-11x-26}{7-3x}}$

22. $y = e^{\sqrt{18-4x}}+\arccos\dfrac{2+5x}{3-x}$

23. $y=\ln\dfrac{4x-x^2}{5x^2-2x-24}-3^{\sqrt{3-7x}-\sqrt{x+4}}$

24. $y = \arcsin\left(x^3+7\right)-\sqrt[4]{\dfrac{x^3-x}{6-x-x^2}}$

25. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1-x^3}{4x^2-3x-10}+\lg\dfrac{3x-6x^2+30}{4x+1}$

26. $y = \arccos\left(2x^2 - 7\right) - 7^{\sqrt{12-7x} - \sqrt{3x+2}}$

27. $y = \log_{0,1}\left(7x + 6x^2 - x^3\right) + \sqrt[3]{\dfrac{2x-9}{10+3x}}$

28. $y = \arcsin\dfrac{2-x}{3x-4} + \dfrac{9x - x^3}{4x - 3x^2 + 4}$

29. $y = e^{\sqrt[3]{4-x^2} - \sqrt{x^2+2x}} - \arccos\dfrac{3x}{1+x}$

30. $y = \ln\dfrac{3x^2 - 4x - 20}{4x - 3x^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{7+3x}{5x - 3x^2 + 2}$

31. $y = 3\arccos\dfrac{2x-3}{x+5} - e^{\sqrt{5x - 4x^2}}$

32. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{4 - x^2 + 3x}{3x + 5x^2} + \lg\left(8 - 2x - x^2\right)$

33. $y = \arcsin\left(2x^2 - 9\right) - 2^{\frac{5-x}{2x^2+3x}}$

34. $y = \log_{1,3}\dfrac{x^2 + 4x + 4}{6x - x^2} - \sqrt[3]{\dfrac{8x-7}{5x - x^2 - 6}}$.

Пример выполнения задания 1

Найти область определения заданной функции:

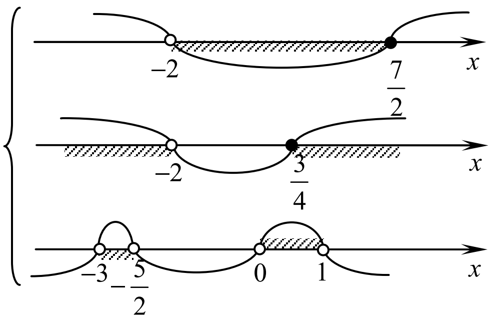
$$y = \arccos\frac{3x-5}{2+x} + \log_{0,3}\frac{3x - 2x^2 - x^3}{2x+5}\ .$$

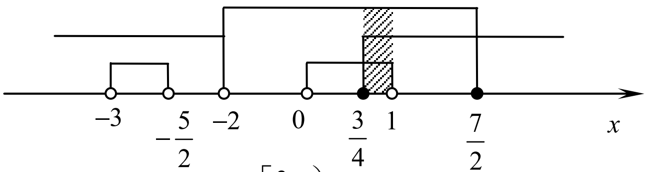
Решение. По определению областью определения являются те значения независимой переменной x , при которых функция имеет смысл, следовательно, значения x должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{3x-5}{2+x} \le 1, \\ \dfrac{3x - 2x^2 - x^3}{2x+5} > 0. \end{cases}$$

Решим данную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-5}{2+x} \le 1, \\ \dfrac{3x-5}{2+x} \ge -1, \\ \dfrac{3x-2x^2-x^3}{2x+5} > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{3x-5}{2+x} - 1 \le 0, \\ \dfrac{3x-5}{2+x} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{x\left(3-2x-x^2\right)}{2x+5} > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{2x-7}{2+x} \le 0, \\ \dfrac{4x-3}{2+x} \ge 0, \\ \dfrac{x(1-x)(x+3)}{2x+5} > 0 \end{cases},$$





$$x \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$$

Ответ: $\left[\dfrac{3}{4};\, 1\right)$.

Задание 2

Выяснить четность, нечетность заданных функций.

1. $y = \dfrac{\lg\left(2-x^2\right)}{\sqrt[3]{\cos 2x}} + e^{-x^2}$ **2.** $y = \ln\dfrac{3-x^2}{3+x^2} - 2x\cos\dfrac{x}{3}$

3. $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}+\dfrac{|x-4|-|x+4|}{x^4-x^2+1}$

4. $y=2x\,\mathrm{tg}\sqrt{2-x^4}-\dfrac{|x|}{x}$

5. $y=|2x-3|+|2x+3|-\lg\left(3+x^6\right)$

6. $y=\arcsin 2x-x^3\cdot e^{4-|x|}$

7. $y=\left(\sin^2 3x-\cos^3 2x\right)\cdot x^3$

8. $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}-3\cdot e^{|x|-1}$

9. $y=\arccos\dfrac{x}{2}+|3x-2|+|3x+2|$

10. $y=\log_2\dfrac{x^3-1}{x^3+1}-|2-x|+|2+x|$

11. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{2^{-x}-2^x}{x^2}$

12. $y=2^{-x^2}\left(\cos^5 3x-x\sin 2x\right)$

13. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}-x\cdot\lg|x|$

14. $y=\ln\dfrac{3x-2}{3+2x}-\cos^3\dfrac{x}{3}$

15. $y=\sin^5\left(x^2-3\right)+\dfrac{5^x+5^{-x}}{x^2+x^4+2}$

16. $y=\cos 8x\cdot\mathrm{tg}\dfrac{x}{4}-\lg\dfrac{2x-1}{2x+1}$

17. $y=\sqrt[6]{2-x^4}\cdot\mathrm{ctg}^3 x-\dfrac{e^{2-|x|}}{2x}$

18. $y=\dfrac{|x|}{x}+\ln\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

19. $y=\arcsin\dfrac{2}{x}-\mathrm{tg}^3 5x$

20. $y=\sqrt{\cos 5x-\sin^2\dfrac{x}{5}+3}+x|x|$

21. $y=\lg\dfrac{3^x+2}{3^x-2}-\sqrt[3]{\cos^2 x-|x|}$

22. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{3}{x}-\dfrac{\cos x-\mathrm{tg}^2 x}{x^3-x}$

23. $y=\dfrac{x^4+3}{\sin 2x}-x^3\lg\left(2+x^2\right)$

24. $y=\arcsin\dfrac{x}{4}+|3x+1|-|1-3x|$

25. $y=\dfrac{\mathrm{arctg}x}{\sqrt{4-x^2}}-x\cdot\log_2\left(|x|+3\right)$

26. $y=\ln\left(|x+2|+|2-x|\right)-e^{3-|x|}$

27. $y=\left(\sin^3 x-x\cdot\cos\dfrac{x}{3}\right)\cdot\lg\dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

28. $y=\sqrt{3^{-x}+3^x}\cdot\mathrm{arctg}2x$

29. $y=\arccos\dfrac{x^2}{2}-e^{\sqrt{|5-x|+|5+x|}}$

30. $y=\dfrac{10^x-1}{10^x+1}-\dfrac{\sin^2 2x}{|x|-x^2}$

31. $y=\sqrt[3]{e^{-2x}-e^{2x}}\cdot\cos^3 2x-\dfrac{x^3}{\sin^4 x}$

32. $y = \log_3\left(\left|2x-5\right|\right) + \left|2x+5\right| - \arcsin x^2$

33. $y = \cos\dfrac{\left|2x-1\right| - \left|2x+1\right|}{x^3 - x} + 2^{-x^2}$ **34.** $y = \sqrt[4]{x^2 + e^{-|x|}} \cdot \mathrm{ctg}^3 x$

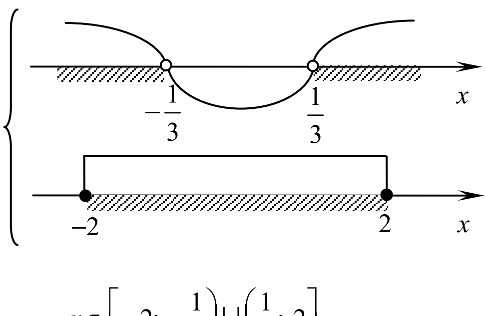
Пример выполнения задания 2

Выяснить четность, нечетность функции $y = \ln\dfrac{3x-1}{3x+1} - \arcsin\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}$.

Решение. Для исследования функции на четность, нечетность, во-первых, проверим, является ли область определения данной функции симметричным промежутком. Область определения удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{3x+1} > 0, \\ -1 \le \sqrt[3]{\dfrac{x}{2}} \le 0. \end{cases}$$

Решим эту систему $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{3x+1} > 0, \\ -1 \le \dfrac{x}{2} \le 1, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{3x+1} > 0, \\ -2 \le x \le 2, \end{cases}$



$x \in \left[-2; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; 2\right]$.

Легко увидеть, что область определения, действительно, представляет собой симметричные промежутки.

Во-вторых, находим $y(-x)$:

$$y(-x)=\ln\frac{3(-x)-1}{3(-x)+1}-\arcsin\sqrt[3]{\frac{-x}{2}}=\ln\frac{-3x-1}{-3x+1}-\arcsin\left(-\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\ln\frac{-(3x+1)}{-(3x-1)}-\left(-\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)=\ln\frac{3x+1}{3x-1}+\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=$$

$$=\ln\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{-1}+\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=-\ln\frac{3x-1}{3x+1}+\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=$$

$$=-\left(\ln\frac{3x-1}{3x+1}-\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)=-y(x).$$

Так как $y(-x)=-y(x)$, то по определению нечетной функции искомая функция является нечетной.

Ответ: нечетная.

1.3 Предел и непрерывность функции

Задание 1

Найти предел функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-8x^2-11x+18}{x^2-3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-10x+9}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2-10x+16}{x^2-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-7x-6}{x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2-9x+14}{x^2-5x+4}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^2-2x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2-8x+12}{x^2-6x+5}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-6x^2+3x+10}{x^2-3x-4}$

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-4x^2-7x+10}{x^2-7x+6}$ **10.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+12}{x^2-4x-5}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2-6x+8}{x^2-8x+7}$ **12.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-8x^2+5x+14}{x^2-5x-6}$

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-9x+8}$ **14.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-9x^2+6x+16}{x^2-6x-7}$

15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-10x^2+7x+18}{x^2-7x-8}$ **16.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-11x+18}$

17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-8x-9}$ **18.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^2+2x-3}$ **20.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-x-6}$

21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-5x+6}$ **22.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2-x-2}{x^2-2x-8}$

23. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^2-6x+8}$ **24.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8x^2+17x+10}{x^2-3x-10}$

25. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-9x^2+20x-12}{x^2-7x+10}$ **26.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4x-12}$

27. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-10x^2+23x-14}{x^2-8x+12}$ **28.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-5x-14}$

29. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-11x^2+26x-16}{x^2-9x+14}$ **30.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-6x-16}$

31. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-12x^2+29x-18}{x^2-10x+16}$ **32.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+7x^2+4x-12}{x^2-7x-18}$

33. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2-x+10}{x^2+2x-8}$ **34.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+x^2-9x-14}{x^2-4x-12}$.

Пример выполнения задания 1

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+4x^2-2x-15}{x^2-4x-21}$.

Решение. 1). Проверяем, есть ли неопределенность. Для этого $x=-3$ подставляем в выражение $\dfrac{x^3+4x^2-2x-15}{x^2-4x-21}$, получаем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для того, чтобы избавиться от данной неопределенности воспользуемся разложением числителя и знаменателя на множители, одним из которых будет $(x+3)$.

2). $x^3+4x^2-2x-15=(x+3)\left(x^2+x-5\right)$, т.к.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3+4x^2-2x-15 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 \qquad\qquad & x^2+x-5 \\ \cline{1-1}
-\;x^2-2x-15 & \\
x^2+3x \qquad & \\ \cline{1-1}
-\;-5x-15 & \\
-5x-15 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

3). $x^2-4x-21=(x+3)(x-7)$, т.к. $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$,

где $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\quad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^2-4x-21 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^2+3x \qquad & x-7 \\ \cline{1-1}
-\;-7x-21 & \\
-7x-21 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

4). Находим:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2-2x-15}{x^2-4x-21}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)\left(x^2+x-5\right)}{(x+3)(x-7)}\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-5}{x-7}=$$

$$=\frac{(-3)^2+(-3)-5}{-3-7}=-\frac{1}{10}.$$

Ответ: $-0{,}1$.

Задание 2

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-3x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{8+x}{\sqrt{1-x}-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}-(1+x)}{3x^2+4x}$

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-7x-8}{\sqrt{9+2x}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-6x+5}$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}{x^2-5x+4}$

13. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-9x+8}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2+x-12}$

15. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{x^2+9x+8}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x^3-4x^2+3x}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{x^2-1}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-10x+9}{3-\sqrt{10-x}}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x^2-8x-9}$

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

22. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2}}$

23. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}$

24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-6x+8}$

25. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x}}{x^2-7x+6}$

26. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{8-x}}{x^2+x-12}$

27. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{12+x}-\sqrt{6}}{x^2+5x-6}$

28. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{x^2-8x-9}$

29. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+8}-\sqrt{2x}}$

31. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{2-x}-3}{x^2+9x+14}$

32. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{12+x}-2}{x^2+6x-16}$

33. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-6x-27}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1-x}}$

34. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{2x+14}-2}$.

Пример выполнения задания 2

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{16-x}}{x^2+4x-21}$.

Решение. 1) Проверяем, есть ли неопределенность. Для этого $x=-7$ подставляем в выражение $\dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{16-x}}{x^2+4x-21}$, получаем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для того, чтобы избавиться от данной неопределенности, во-первых, знаменатель разложим на множители, один из которых $(x+7)$, во-вторых, числитель и знаменатель умножим на сопряженное к числителю выражение $\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)$.

2) $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$, т.к.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2-4x-21 & x+7 \\ \cline{2-2} x^2+7x & x-3 \\ \cline{1-1} -3x-21 & \\ -\,-3x-21 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3) $$\lim_{x\to-7}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{16-x}}{x^2+4x-21}\cdot\frac{\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{\left(\sqrt{2-3x}-\sqrt{16-x}\right)\cdot\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}{(x+7)(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{\left(\sqrt{2-3x}\right)^2-\left(\sqrt{16-x}\right)^2}{(x+7)(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2-3x)-(16-x)}{(x+7)(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{-14-2x}{(x+7)(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{-2\cdot(x+7)}{(x+7)(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{-2}{(x-3)\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{16-x}\right)}=$$

$$=\frac{-2}{(-7-3)\left(\sqrt{2-3(-7)}+\sqrt{16-(-7)}\right)}=$$

$$=\frac{-2}{-10\left(\sqrt{23}+\sqrt{23}\right)}=\frac{1}{10\sqrt{23}}=\frac{\sqrt{23}}{230}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{23}}{230}$.

Задание 3

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(3-x)^2-(3+x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^4-(1+x)^4}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^3-(1+x)^3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-x)^4+(1+x)^4}{(1+x)^4-(1-x)^3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(6-x)^2-(6-x)^2}{(6+x)^2-(1-x)^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+1)^2}{(x-1)^3-(x+1)^3}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2x)^3-8x^3}{(1+2x)^2+4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-4x)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2-(x+2)^3}{(4-x)^3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^3}{(x+1)^2-(x+1)^3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)^3-(x-2)^3}{x^2+2x-3}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3+(x+2)^3}{(x+4)^3+(x+5)^3}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+3)^3+(x+4)^3}{(x+3)^4-(x-4)^4}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x}{(x+1)^4-(x-1)^4}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^3-(x+5)^3}{(3x-1)^3+(2x+3)^3}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+10)^2+(3x+1)^2}{(x+6)^3-(x+1)^3}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3+(3x+1)^3}{(2x+3)^3-(x-7)^3}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(2x+3)^3}{(2x+1)^2+(2x+3)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-x^4}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^4-(x-2)^4}{(x+5)^2+(x-2)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^4+2x^2-1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+3x}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+3)^2}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2-(x+1)^2}{x^2+x+1}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{x^3-2x}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-x)^3+(x+1)^3}{(2x-3)^2}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^2+(4-x)^2}{(2x-1)^3-8(x+2)^3}$.

Пример выполнения задания 3

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-x)^4-(2+x)^4}{(2x-1)^3+(3-x)^3}$.

Решение. Проверяем, есть ли неопределенность. Числитель и знаменатель представлены в виде алгебраических многочленов, которые при $x\to\infty$ являются бесконечно большими величинами, следовательно, получаем неопределенность в виде $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для избавления от данной неопределенности проведем следующие преобразования, используя формулы сокращенного умножения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)^4-(2+x)^4}{(2x-1)^3+(3-x)^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)^2(1-x)^2-(2+x)^2(2+x)^2}{(2x-1)^3+(3-x)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-2x+x^2\right)\left(1-2x+x^2\right)-\left(4+4x+x^2\right)\left(4+4x+x^2\right)}{\left(8x^3-12x^2+6x-1\right)+\left(27-27x+9x^2-x^3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)-\left(16+32x+24x^2+8x^3+x^4\right)}{7x^3-3x^2-21x+26}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-12x^3-18x^2-36x-15}{7x^3-3x^2-21x+26}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-12-\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)}{x^3\left(7-\frac{3}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{26}{x^3}\right)}=-\frac{12}{7},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C}{x^k}=0 \quad \left(k>0,\ C\in R\right)$.

Ответ: $-\dfrac{12}{7}$.

Формулы сокращенного умножения:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^3\right).$$

Задание 4

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)}-\sqrt{x^4-9}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+3}-x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\sqrt{x}$

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+8}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-1}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^4-5}-\sqrt{x^4+2}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+3}\right)\sqrt{x}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x(x-1)}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)(x+2)}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+2}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3-3}-\sqrt{x^3-2}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+7}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+3}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+6}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+7}-\sqrt{x^4-2}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+x-2}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-5}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{2x^2}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{x^2+2x+4}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+27}\right)$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2+3}-\sqrt{x^4-3x^2+2}\right)$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^4+x^2+1}-\sqrt{3x^4-x-1}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x^3-2x+3}-\sqrt{x^3+2}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x+2}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-8}\right)$.

Пример выполнения задания 4

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-5}\right)$.

Решение. Проверим, есть ли неопределенность.

Выражения $\left(x^2+4\right)$, $\left(x^4+3\right)$, $\left(x^4-5\right)$ являются алгебраическими многочленами, которые при $x\to\infty$ бесконечно большие величины. Следовательно, получаем неопределенность в виде $\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]$.

Для того, чтобы избавиться от неопределенности $[\infty-\infty]$, домножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\left(\sqrt{x^4+3}+\sqrt{x^4-5}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-5}\right)\frac{\left(\sqrt{x^4+3}+\sqrt{x^4-5}\right)}{\left(\sqrt{x^4+3}+\sqrt{x^4-5}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+4\right)\left(\left(\sqrt{x^4+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^4-5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x^4+3}+\sqrt{x^4-5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+4\right)\left(x^4+3-\left(x^4-5\right)\right)}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{3}{x^4}\right)}+\sqrt{x^4\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+4\right)\cdot 8}{x^2\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+x^2\cdot\sqrt{1-\frac{5}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^4}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{8\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^4}}} = \frac{8}{2} = 4,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{C}{x^k} = 0 \quad \left(k>0,\ C\in R\right)$.

Ответ: 4.

Задание 5

Вычислить пределы функций, используя первый замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{4x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}x}{7x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{3x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\sin^2 x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 7x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,\mathrm{tg}2x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 2x-2\cos x}{5x^2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\cos x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{4x^3}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{2x^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x-\sin 7x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\sin 5x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{(1-\cos 2x)}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{\sin^2 x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-tg^2x}{2x^4}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 6x-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin 6x-\cos 6x}{\sin x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{5x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin 2x-\sin 6x}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\cos 7x-\cos 3x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos 4x-\cos 2x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin 2x-\sin 5x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin x}{3x\sin^2 2x}$.

Пример выполнения задания 5

Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 8x}{\cos 5x-1}$

Решение. Проверим, есть ли неопределенность.

Известно, что $\cos(\alpha x)$ при $x\to 0$ равен единице $\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos(\alpha x)=1\right)$.

Следовательно, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=\lim\limits_{x\to 0}\cos 8x=\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x=1$.

Для того, чтобы избавиться от неопределенности, воспользуемся тригонометрическими преобразованиями и первым замечательным пределом $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 8x}{\cos 5x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{3x+8x}{2}\sin\dfrac{3x-8x}{2}}{-(1-\cos 5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{11}{2}x\sin\left(-\dfrac{5}{2}x\right)}{-2\sin^2\dfrac{5}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\dfrac{11x}{2}}{\sin\dfrac{5}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin\frac{11}{2}x}{\frac{11}{2}x}\cdot\dfrac{11}{2}x}{\dfrac{\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\cdot\dfrac{5}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{11}{2}x}{\dfrac{5}{2}x}=-\frac{11}{5}=-2{,}2.$$

Ответ: $-2{,}2$.

Тригонометрические формулы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Задание 6

Вычислить пределы функций, используя первый замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,2}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 8\pi x}$

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$

13. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{(x-\pi)^2}$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{\mathrm{tg}\,x}$

15. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

16. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}\,(x-2)}{\sin 3\pi x}$

19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{x+2}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

22. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\,3x}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$

25. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 2x}$

26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

27. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$

29. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x-\cos 3}{x-3}$

30. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 2x}$

31. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,5}{x-5}$

32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\mathrm{tg}\,\pi x}$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,1}$

34. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}7x}$.

Пример выполнения задания 6

Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}(4x-1)\operatorname{ctg}8\pi x$

Решение. Проверяем, есть ли неопределенность.

Известно, что $\operatorname{ctg}k\pi=\infty$ $(k\in Z)$. Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\operatorname{ctg}8\pi x=\infty$, следовательно, получаем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

Для того, чтобы избавиться от неопределенности, воспользуемся первым замечательным пределом $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$, введя замену:

$t=x-\dfrac{1}{4}$ $\quad\left(\text{т.к. } x\to\dfrac{1}{4}\Rightarrow x-\dfrac{1}{4}=t\to 0\right)$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}(4x-1)\operatorname{ctg}8\pi x=\lim_{t\to 0}\left(4\left(t+\frac{1}{4}\right)-1\right)\operatorname{ctg}\left(8\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)=\lim_{t\to 0}4t\cdot\operatorname{ctg}(8\pi t+2\pi)=$$

$$=\lim_{t\to 0}4t\cdot\operatorname{ctg}8\pi t=[0\cdot\infty]=\lim_{t\to 0}4t\frac{\cos 8\pi t}{\sin 8\pi t}=\left\{\lim_{t\to 0}\cos 8\pi t=1\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{4t}{\sin 8\pi t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{8\pi t}{\sin 8\pi t\cdot 2\pi}=\frac{1}{2\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2\pi}$.

Задание 7

Вычислить пределы функций, используя второй замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{5x-1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+2}\right)^{2-x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-2}$ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2-1}$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+3}{13x-10}\right)^{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$ **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-7}\right)^{\frac{x}{6}+1}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$ **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-6}{3x+5}\right)^{\frac{x}{2}-1}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x+5}\right)^{7x+4}$ **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-7}{2x^2+9}\right)^{2x^2+1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x-7}{21x+8}\right)^{2x+1}$ **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+7}\right)^{1-2x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{2x-x^3}$ **16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-6}{5x+1}\right)^{2x+3}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$ **18.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-15}{7x+8}\right)^{2-7x}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{1-x^2}$ **20.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2-7}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{1-4x}$ **22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+7}{2x^2+3}\right)^{3-x^2}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-3}{4x^2+1}\right)^{1-2x^2}$ **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{3x-4}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+7}{3x^3-1}\right)^{1-x^3}$ **26.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{3x-2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+20}\right)^{x-3}$ **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2-1}{7x^2+3}\right)^{14x^2+1}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4}{3x^2-10}\right)^{2x^2+1}$ **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-7}{3x^2+1}\right)^{3-x^2}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+7}{5x^3+3}\right)^{2x^3}$ **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-7}{9x+5}\right)^{4x+5}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2+5}\right)^{2-7x^2}$ **34**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+7}{4x-3}\right)^{3x-2}$.

Пример выполнения задания 7

Вычислить пределы функций, используя второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-5}{2x^3+3}\right)^{4-9x^3}$.

Решение. Проверяем, есть ли неопределенность.

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5}{2x^3+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{2-\dfrac{5}{\infty}}{2+\dfrac{3}{\infty}}=\frac{2-0}{2+0}=1 \text{ и}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-9x^3\right)=\left[4-9\cdot\infty\right]=\infty$, получаем неопределенность $[1^{\infty}]$.

Для того, чтобы избавиться от неопределенности данного вида, воспользуемся вторым замечательным пределом $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-5}{2x^3+3}\right)^{4-9x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{2x^3+3}\right)^{4-9x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x^3+3}{-8}}\right)^{4-9x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x^3+3}{-8}}\right)^{\frac{2x^3+3}{-8}}\right]^{\frac{-8}{2x^3+3}\cdot\left(4-9x^3\right)}=\lim_{x\to\infty}[e]^{\frac{-8\left(4-9x^3\right)}{2x^3+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-32+72x^3}{2x^3+3}}=$$

$$=\left[e^{\frac{\infty}{\infty}}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(72-\frac{32}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{3}{x^3}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{72-\frac{32}{x^3}}{2+\frac{3}{x^3}2}}=e^{\frac{72}{2}}=e^{36}.$$

Ответ: e^{36}.

Задание 8

Исследовать на непрерывность функцию, найти асимптоты и построить схематично график.

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}$

2. $f(x)=\dfrac{5x+4}{x^2-3x+2}$

3. $f(x)=\dfrac{5x+6}{x^2-4x+3}$

4. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-6x+5}$

5. $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-5x+4}$

6. $f(x)=\dfrac{3x+10}{x^2-4x-5}$

7. $f(x)=\dfrac{7x-2}{x^2-7x+6}$

8. $f(x)=\dfrac{8x}{x^2-6x-16}$

9. $f(x)=\dfrac{5x+14}{x^2-8x+7}$

10. $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+3)(x-4)}$

11. $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-x-2}$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-6}$

13. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-9x+8}$

14. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-12}$

15. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-10x+9}$

16. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$

17. $f(x)=\dfrac{5x+6}{x^2-2x-3}$

18. $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+2x-8}$

19. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-3x-4}$

20. $f(x)=\dfrac{x-7}{x^2+4x-5}$

21. $f(x)=\dfrac{4-x}{x^2-5x-6}$

22. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-6x-7}$

23. $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2-9}$

24. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+7x+6}$

25. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-7x-8}$

26. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-6}$

27. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-8x-9}$

28. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x-10}$

29. $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-6x+8}$

30. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+2x-3}$

31. $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-7x+10}$

32. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+x-2}$

33. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$

34. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$

Пример выполнения задания 8

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{2-3x}{x^2+5x+6}$, найти асимптоты и построить схематично график.

Решение. Во-первых, исследуем на непрерывность данную функцию. При $x=-2$ и $x=-3$ функция $f(x)=\dfrac{2-3x}{x^2+5x+6}$ не определена.

Для установления характера разрывов в точках $x=-2$ и $x=-3$ найдем односторонние пределы:

при $x\to-2-0$ (слева), при $x\to-2+0$ (справа),

при $x\to-3-0$ (слева), при $x\to-3+0$ (справа),

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{2-3x}{x^2+5x+6}=-\infty\text{, а }\lim_{x\to-2+0}\frac{2-3x}{x^2+5x+6}=+\infty.$$

Функция в точке $x=-2$ терпит разрыв, т.к. односторонние пределы (достаточно было бы одного) бесконечны, т.е. $x=-2$ – точка разрыва функции второго рода.

Аналогично, $x=-3$ – точка разрыва функции второго рода, т.к.

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{2-3x}{x^2+5x+6}=+\infty\text{ и }\lim_{x\to-3+0}\frac{2-3x}{x^2+5x+6}=-\infty.$$

При $x_0\in(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,-2)\cup(-2;\,+\infty)$ функция непрерывна, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Во-вторых, найдем асимптоты.

Так как точки $x=-2$ и $x=-3$ являются точками разрыва функции второго рода, то прямые $x=-2$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{(x^2+5x+6)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{x^3+5x^2+6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=$$

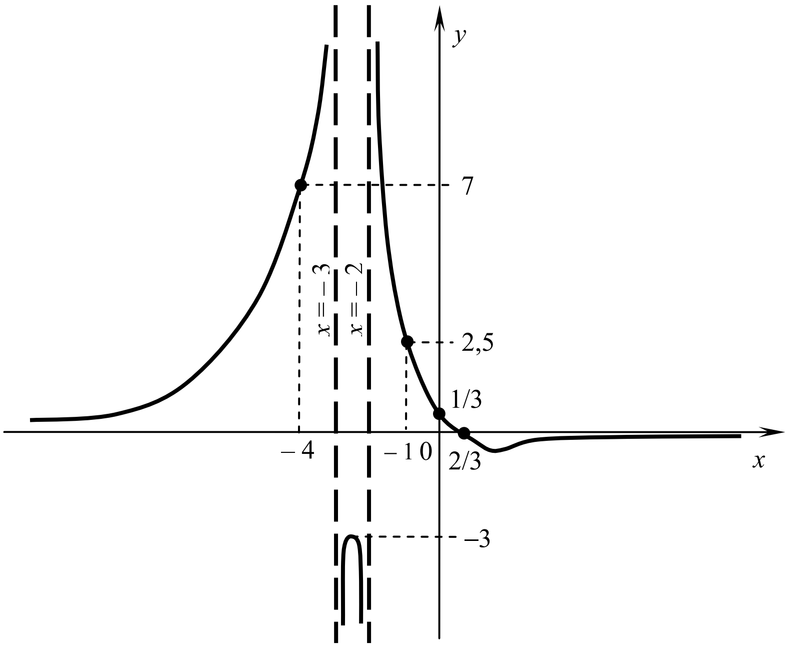
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\frac{0}{1}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{x^2+5x+6}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{x^2+5x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Так как $k=0$, следовательно, получаем частный случай наклонной асимптоты горизонтальную $y=0$.

В-третьих, построим схематично график (см. рис.)



Ответ:

1). Функция непрерывна при $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$;

2). $x=-3$ и $x=-2$ – точки разрыва функции второго рода.

3). Вертикальные асимптоты: $x=-3$ и $x=-2$.
4). Горизонтальная асимптота: $y=0$.
График (см. рис.).

Задание 9

Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва.

1. $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$

3. $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$

4. $f(x)=\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}$

5. $f(x)=\dfrac{6x^2+x-1}{2x+1}$

6. $f(x)=\dfrac{6x^2-x-1}{2x-1}$

7. $f(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x+1}$

8. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$

9. $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{3x+1}$

10. $f(x)=\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$

11. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

12. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{2x-1}$

13. $f(x)=\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$

14. $f(x)=\dfrac{10x^2+9x-85}{2x-5}$

15. $f(x)=\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$

16. $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$

17. $f(x)=\dfrac{6x^2+x-1}{3x-1}$

18. $f(x)=\dfrac{6x^2-75x-39}{2x+1}$

19. $f(x)=\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}$

20. $f(x)=\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}$

21. $f(x)=\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}$

22. $f(x)=\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}$

23. $f(x)=\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}$

24. $f(x)=\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$

25. $f(x)=\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$

26. $f(x)=\dfrac{3x^2+17x-56}{x+8}$

27. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{2x-1}$

28. $f(x)=\dfrac{15x^2-2x-1}{5x+1}$

29. $f(x)=\dfrac{3x^2+17x-6}{3x-1}$

30. $f(x)=\dfrac{2x^2-9x-35}{x-7}$

31. $f(x)=\dfrac{15x^2-2x-1}{3x-1}$

32. $f(x)=\dfrac{3x^2-22x+24}{3x-4}$

33. $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-20}{x+2}$

34. $f(x)=\dfrac{2x^2+7x-114}{x-6}$.

Пример выполнения задания 9

Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{15x^2+2x-8}{3x-2}$ и определить характер точек разрыва.

Решение. При $x=\dfrac{2}{3}$ функция не определена, следовательно, функция в точке $x=\dfrac{2}{3}$ терпит разрыв:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}+0}\frac{15x^2+2x-8}{3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(5x+4)}{3x-2}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}(5x+4)=\frac{22}{3},$$

т.е. конечный предел существует:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}-0}\frac{15x^2+2x-8}{3x-2}=\lim_{x\to\frac{2}{3}+0}\frac{15x^2+2x-8}{3x-2}=\frac{22}{3}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{15x^2+2x-8}{3x-2}\neq f\left(\dfrac{2}{3}\right)$, следовательно, $x=\dfrac{2}{3}$ – точка устранимого разрыва первого рода.

Ответ:

1). Функция непрерывна при $x \in \left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$;

2). $x = \frac{2}{3}$ – точка устранимого разрыва первого рода.

Замечание 1. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{15x^2 + 2x - 8}{3x - 2}, & \text{при } x \neq \frac{2}{3}, \\ \frac{22}{3}, & \text{при } x = \frac{2}{3} \end{cases}$ будет непрерывна на всей числовой прямой, т.к. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \frac{15x^2 + 2x - 8}{3x - 2} = f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Замечание 2. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{15x^2 + 2x - 8}{3x - 2}, & \text{при } x \neq \frac{2}{3}, \\ k, & \text{при } x = \frac{2}{3}, \end{cases}$ где $k \in \left(-\infty;\ \frac{22}{3}\right) \cup \left(\frac{22}{3};\ +\infty\right)$, будет в точке $x = \frac{2}{3}$ терпеть разрыв. Так как $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \frac{15x^2 + 2x - 8}{3x - 2} \neq f\left(\frac{2}{3}\right)$, следовательно, $x = \frac{2}{3}$ – точка устранимого разрыва первого рода.

Задание 10

Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

1. $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \textit{если } x \leq 1, \\ x - 1, & \textit{если } x > 1. \end{cases}$ **2.** $y = \begin{cases} 1 - 2x, & \textit{если } x \leq 0, \\ x^3 - 1, & \textit{если } x > 0. \end{cases}$

3. $y=\begin{cases}1-x, & \text{если } x\le -1,\\ x^3, & \text{если } x>-1.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 1,\\ -x^2, & \text{если } x>1.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x<0,\\ x^3-1, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\le 1,\\ 4-x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}x, & \text{если } |x|<1,\\ 3, & \text{если } |x|\ge 1.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases}2x+3, & \text{если } x<-2,\\ 2^{-x}, & \text{если } x\ge -2.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}2x, & \text{если } x\le 1,\\ 2-x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases}x^2+4, & \text{если } x<1,\\ \log_2 x, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$

11. $y=\begin{cases}1-x^2, & \text{если } x<0,\\ x, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$

12. $y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & \text{если } x\le 1,\\ 1+x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

13. $y=\begin{cases}4-x, & \text{если } x\le 1,\\ x-2, & \text{если } x>1.\end{cases}$

14. $y=\begin{cases}x, & \text{если } x\le 2,\\ 6-x, & \text{если } x>2.\end{cases}$

15. $y=\begin{cases}e^{2x}, & \text{если } x\le 0,\\ 3-x, & \text{если } x>0.\end{cases}$

16. $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & \text{если } x<-1,\\ 2x+1, & \text{если } x\ge -1.\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}2-x, & \text{если } x\le 0,\\ e^{-x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$

18. $y=\begin{cases}x^3, & \text{если } x<-1,\\ x+4, & \text{если } x\ge -1.\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\le 2,\\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x>2.\end{cases}$

20. $y=\begin{cases}x^3, & \text{если } x\le -1,\\ 3x^2, & \text{если } x>-1.\end{cases}$

21. $y=\begin{cases}x+2, & \text{если} x<1,\\ \ln x, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$

22. $y=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & \text{если } x<0,\\ 2x^2, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$

23. $y=\begin{cases}3x^2, & \text{если } x\le 1,\\ 2x+3, & \text{если } x>1.\end{cases}$

24. $y=\begin{cases}5-x^2, & \text{если } x<2,\\ x^3-1, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

25. $y=\begin{cases}2x+1, & если\ x\le 1,\\ 3-x^2, & если\ x>1.\end{cases}$

26. $y=\begin{cases}2-x, & если\ x\le -2,\\ x^2-3, & если\ x>-2.\end{cases}$

27. $y=\begin{cases}2^x, & если\ x<-1,\\ 4x^2, & если\ x\ge -1.\end{cases}$

28. $y=\begin{cases}\sin x, & если\ x<0,\\ \cos x, & если\ x\ge 0.\end{cases}$

29. $y=\begin{cases}3-x, & если\ x\le 3,\\ x^2-6, & если\ x>3.\end{cases}$

30. $y=\begin{cases}4-x, & если\ x<4,\\ \log_2 x, & если\ x\ge 4.\end{cases}$

31. $y=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & если\ x<-2,\\ x+2, & если\ x\ge -2.\end{cases}$

32. $y=\begin{cases}\dfrac{3}{x}, & если\ x<-1,\\ 1-x^2, & если\ x\ge -1.\end{cases}$

33. $y=\begin{cases}x^3+1, & если\ x\ge -1,\\ 2x-1, & если\ x<-1.\end{cases}$

34. $y=\begin{cases}3x+4, & если\ x\le -1,\\ 5^{-x}, & если\ x>-1.\end{cases}$

Пример выполнения задания 10

Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}\dfrac{6}{x}, & если\ x\le -2,\\ 2-x^2, & если\ x>-2.\end{cases}$$

Решение. Исследуем функцию на непрерывность.

Функция $y=\dfrac{6}{x}$ при $x\le -2$ определена и непрерывна.

Функция $y=2-x^2$ при $x>-2$ определена и непрерывна, кроме $x=-2$.

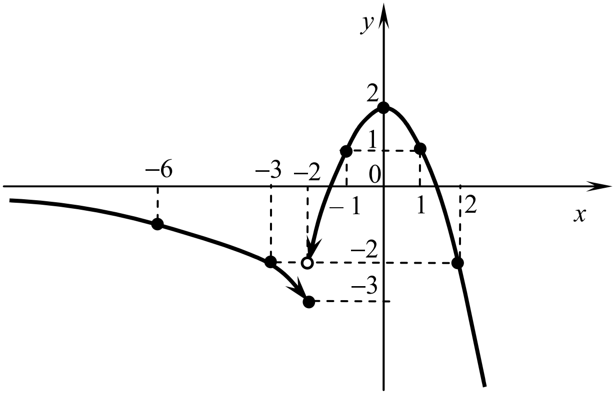
При $x=-2$ функция определена, т.к. $y(-2)=\dfrac{6}{-2}=-3$.

$$\lim_{x\to -2-0} y(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{6}{x}=-3,$$

$\lim\limits_{x \to -2+0} y(x) = \lim\limits_{x \to -2+0} \left(2 - x^2\right) = -2$.

Так как $\lim\limits_{x \to -2-0} y(x) \neq \lim\limits_{x \to -2+0} y(x)$, то в точке $x = -2$ функция терпит неустранимый разрыв первого рода.

Сделаем чертеж: графиком функции $y = \dfrac{6}{x}$ является гипербола, а графиком $y = 2 - x^2$ – парабола.



Ответ: $x = -2$ – точка неустранимого разрыва первого рода. График (см. рис.).

Задание 11

Вычислить пределы функций с помощью эквивалентных бесконечно малых.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$ **4.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x+x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-x^2}{x+\ln(1+x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg} x-\sin x}{e^{2x}-e^{3x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-2x}}{2\arcsin x-x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\arcsin x}{x+\ln(1+x^2)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x-\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x-x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg} x+x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4^{2x}}{\sin x-2\ln(x+1)}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg} x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg} x^3}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\ln(1+3x)}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\ln(1+x)+\sin x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{3x-\ln(1+2x)}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{4x+\sin 2x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{4x+\sin 2x^2}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{\ln(1+2x)-\operatorname{tg} x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{e^{2x}-e^{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{\ln(1+3x)+\operatorname{tg} x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^2}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{x-\ln(1+4x)}$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-3x} - e^{5x}}{\arcsin x + 2\operatorname{tg} x}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \ln(1+x)}{2\operatorname{tg}3x - x}$.

Пример выполнения задания 11

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{5x} - 3^{-4x}}{\ln(1+7x) + \operatorname{arctg} 2x}$ с помощью эквивалентных бесконечно малых.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Так как $(5x) \to 0$ при $x \to 0$, то, преобразовав выражение $\left(2^{5x} - 1\right) = \left(e^{\ln 2^{5x}} - 1\right) = \left(e^{5x\ln 2} - 1\right)$ показатель степени $(5x \cdot \ln 2) \to 0$ при $x \to 0$, следовательно, $\left(e^{5x\ln 2} - 1\right) \to 0$, т.е. является бесконечно малой величиной, которую можно заменить на эквивалентную $(5x \cdot \ln 2)$.

Аналогично, $(-4x) \to 0$ при $x \to 0$, тогда $\left(3^{-4x} - 1\right) = \left(e^{\ln 3^{-4x}} - 1\right) = \left(e^{4x\ln 3} - 1\right) \to 0$, т.е. является бесконечно малой величиной, которую можно заменить на эквивалентную $(-4x \cdot \ln 3)$.

Заменив $\ln(1+7x)$ эквивалентной ей бесконечно малой $(7x)$ при $x \to 0$, и $\operatorname{arctg} 2x$ эквивалентной ей бесконечно малой $(2x)$ при $x \to 0$, получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{5x} - 3^{-4x}}{\ln(1+7x) + \operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(2^{5x} - 1\right) - \left(3^{-4x} - 1\right)}{\ln(1+7x) + \operatorname{arctg} 2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(5x\ln 2) - (-4x\ln 3)}{(7x) + (2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(5\ln 2 + 4\ln 3)}{x \cdot 9} = \frac{5\ln 2 + 4\ln 3}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{5\ln 2 + 4\ln 3}{9}$.

ТЕМА 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная функции

Задание 1

Найти производную y'.

1. $y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1 - x^2}}$

2. $y = \dfrac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3}$

3. $y = \dfrac{x^4 - 8x^2}{2\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$

4. $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}$

5. $y = \dfrac{(1 + x^8)\sqrt{1 + x^8}}{12x^{12}}$

6. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 - 3x^4}}$

7. $y = \dfrac{(x^2 - 6)\sqrt{4 + x^2}}{120x^5}$

8. $y = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 8)^3}}{6x^3}$

9. $y = \dfrac{4 + 3x^3}{x\sqrt[3]{(2 + x^3)^2}}$

10. $y = \dfrac{(x^2 - 2)\sqrt{4 + x^2}}{24x^3}$

11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$

12. $y=\dfrac{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}{\sqrt{x^3}}$

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

14. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}(3x+2)}{4x^2}$

15. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x\ \ )^3}}{3x^3}$

16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$

17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$

18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^2+\dfrac{1}{x}}$

19. $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2+2}}{9x^3}$

20. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$

21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$

22. $y=\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$

23. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$

24. $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$

25. $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$

26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$

27. $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+x+1}$

28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$

29. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$

30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

31. $y=\dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{\sqrt{1+x^2}}$

32. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$

33. $y=\dfrac{2x+1}{x^2\sqrt{x^3+1}}$

34. $y=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{(2x+4)^3}$.

Пример выполнения задания 1

Найти производную y' функции $y=\dfrac{2x}{(x-1)\cdot\sqrt[3]{x-2}}$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования

$$\boxed{\left(\frac{u}{\upsilon}\right)'=\frac{u'\upsilon-\upsilon'u}{\upsilon^2}} \quad \text{и} \quad \boxed{(u\cdot\upsilon)'=u'\upsilon+\upsilon'u}.$$

Тогда

$$y'=\frac{(2x)'\left((x-1)\cdot\sqrt[3]{x-2}\right)-(2x)\left((x-1)\cdot\sqrt[3]{x-2}\right)'}{(x-1)^2\,(x-2)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{(2x)'\,(x-1)\cdot\sqrt[3]{x-2}-2x\cdot\left((x-1)'\,\sqrt[3]{x-2}+(x-1)\left(\sqrt[3]{x-2}\right)'\right)}{(x-1)^2\,(x-2)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{2\,(x-1)\sqrt[3]{x-2}-2x\cdot\left(1\cdot\sqrt[3]{x-2}+(x-1)\frac{1}{3}\,(x-2)^{-\frac{2}{3}}\right)}{(x-1)^2\,(x-2)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{\left(6\,(x-1)(x-2)-8x^2+14x\right)}{\left(3\,(x-1)^2\,(x-2)^{\frac{4}{3}}\right)}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{\left(6\,(x-1)(x-2)-8x^2+14x\right)}{\left(3\,(x-1)^2\,(x-2)^{\frac{4}{3}}\right)}$.

Задание 2

Найти производную y'.

1. $y = x - \ln(e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$

2. $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$

3. $y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$

4. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$

5. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{e^x - 3}{2}$

6. $y = \dfrac{1}{1 - 2^x} + \ln\dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$

7. $y = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) - 2\operatorname{arctg} e^x$

8. $y = \sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1}$

9. $y = \ln(e^x + 1) - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x}$

10. $y = \dfrac{x + 1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$

11. $y = x - 3\ln(1 + e^{2x}) - 2\operatorname{arctg}\ e^x$

12. $y = \operatorname{arctg}\ e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}$

13. $y = x - \dfrac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln(1 - e^{2x})$

14. $y = x + \dfrac{8}{1 + \sqrt[4]{e^x}}$

15. $y = e^{-x}\operatorname{arctg}\ e^x - (\operatorname{arctg}\ e^x)^2$

16. $y = \dfrac{e^{x^3}}{1 + x^5}$

17. $y = \operatorname{arctg}\ (e^x - e^{-x})$

18. $y = \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x})$

19. $y = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2}$

20. $y = \ln(\arcsin\sqrt{1 - e^{2x}})$

21. $y = \arccos\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$

22. $y = \ln(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 x})$

23. $y = \ln(\arccos\sqrt{1 - e^{4x}})$

24. $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$

25. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$

26. $y = \ln^3(1 + \cos x)$

27. $y = \ln\sin\dfrac{2x + 4}{x + 1}$

28. $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}$

29. $y = \ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$

30. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

31. $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1} + \arcsin e^{-x})$

32. $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) - \sqrt{x+1}$

33. $y = x^2\arcsin\sqrt{1-x^2}$

34. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Пример выполнения задания 2

Найти производную y' функции $y = \arcsin\left(\sqrt{\sin x}\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления производной сложной функции

$$\boxed{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}},$$

$$y' = \frac{\left(\sqrt{\sin x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\sin x}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{\cos x}{2\cdot\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}}$.

Задание 3

Найти дифференциал dy :

1. $y = \sqrt{x} - (1+x)\mathrm{arctg}\sqrt{x}$

2. $y = \mathrm{tg}(2\arccos\sqrt{1-2x^2})$

3. $y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x})$

4. $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+3})$

5. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$

6. $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$

7. $y = \left(\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$

8. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$

9. $y = x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}$

10. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$

11. $y = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(4-x)}$

12. $y = e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$

13. $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$

14. $y = \ln(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

15. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$

16. $y = \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})$

17. $y = 2x + \ln(\sin x + \cos x)$

18. $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$

19. $y = \ln(x^2-1) - \dfrac{1}{x^2-1}$

20. $y = e^{\sin x}(x - \dfrac{1}{\cos x})$

21. $y = \cos x\ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

22. $y = 7^x(3\sin 3x + \cos 3x)$

23. $y = \dfrac{2\cos x}{\sin^4 x} + \dfrac{3\cos x}{\sin^2 x}$

24. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$

25. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

27. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}$

28. $y = 2\ln\dfrac{x-1}{x+1}\operatorname{arctg} x$

29. $y = \dfrac{(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$

30. $y = \ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$

31. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x$

32. $y=\dfrac{e^x}{2}(\cos x+(x-1)^2\sin x)$

33. $y=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\arcsin\left(2\sqrt{x}\right)$ **34**. $y=\dfrac{x^2}{\arcsin\left(x^2\right)}$.

Пример выполнения задания 3

Найти дифференциал dy функции $y=\ln\left(x\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$.

Решение. Воспользуемся формулами

$\boxed{dy=f'(x)dx}$; $\boxed{(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}}$ и $\boxed{(a\cdot b\cdot c)'=a'bc+b'ac+c'ab}$.

$$y'=\frac{\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)'}{x\sin x\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\cos x\cdot\sqrt{1-x^2}+x\sin x\dfrac{1(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{x\sin x\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sin x\sqrt{1-x^2}+x\cos x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2\sin x}{\sqrt{1-x^2}}}{x\sin x\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\underline{\underline{\sin x\left(1-x^2\right)}}+x\cos x\left(1-x^2\right)-\underline{\underline{x^2\sin x}}}{x\sin x\left(1-x^2\right)}=\frac{\sin x\left(1-2x^2\right)+x\cos x\left(1-x^2\right)}{x\sin x\left(1-x^2\right)}.$$

Ответ: $dy=\dfrac{\sin x\left(1-2x^2\right)+x\cos x\left(1-x^2\right)}{x\sin x\left(1-x^2\right)}dx$.

Задание 4

Найти производную третьего порядка.

1. $y = x\cos x^2$

2. $y = (3 - x^2)\ln x$

3. $y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1)$

4. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$

5. $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$

6. $y = (4x^3 + 5)e^{2x}$

7. $y = x^2 \sin(5x - 3)$

8. $y = \mathrm{tg}^2 x$

9. $y = (2x + 3)\ln^2 x$

10. $y = (1 + x^2)\,\mathrm{arctg}\, x$

11. $y = \sqrt[5]{e^{7x} - 1}$

12. $y = 2^{-x}(4x + 3)$

13. $y = (2x^3 + 1)\cos x$

14. $y = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

15. $y = e^{-2x}\sin(2 + 3x)$

16. $y = (x^2 + 3)\ln(x - 3)$

17. $y = (2x^3 + 1)\cos x$

18. $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$

19. $y = (1 - x - x^2)e^{\frac{x}{2}}$

20. $y = (3x - 7)e^{-x}$

21. $y = \dfrac{\ln(2x+53)}{2x+5}$

22. $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$

23. $y = \dfrac{\ln x}{x^5}$

24. $y = \dfrac{\cos 2x}{x}$

25. $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$

26. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$

27. $y = x\sin(2x - 1)$

28. $y = (x^3 - x)e^{-2x}$

29. $y = (5x - 1)\ln^2 x$

30. $y = e^{x^2 + x}$

31. $y=(x^3+2)\,e^{4x+3}$

32. $y=2xe^{x^2}$

33. $y=x^3\sin(4x)$

34. $y=\ln^2 x\cdot\cos x$.

Пример выполнения задания 4

Найти производную третьего порядка функции $y=e^{-x^2}\cdot x^3$.

Решение. Будем использовать формулу $\boxed{(u\cdot \upsilon)'=u'\upsilon+\upsilon'u}$

$$y'=\left(e^{-x^2}\right)'\cdot x^3+\left(x^3\right)'\cdot e^{-x^2}=e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot x^3+3x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(-2x^4+3x^2\right)$$

$$y''=\left(e^{-x^2}\right)'\left(-2x^4+3x^2\right)+\left(-2x^4+3x^2\right)'e^{-x^2}=e^{-x^2}\cdot(-2x)\left(-2x^4+3x^2\right)+$$

$$+\left(-8x^3+6x\right)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(4x^5-6x^3-8x^3+6x\right)=e^{-x^2}\left(4x^5-14x^3+6x\right)$$

$$y'''=\left(e^{-x^2}\right)'\left(4x^5-14x^3+6x\right)+e^{-x^2}\left(4x^5-14x^3+6x\right)'=$$

$$=e^{-x^2}\cdot(-2x)\left(4x^5-14x^3+6x\right)+e^{-x^2}\left(20x^4-42x^2+6\right)=$$

$$=e^{-x^2}\cdot\left(-8x^6+28x^4-12x^2+20x^4-42x^2+6\right)=$$

$$=e^{-x^2}\cdot\left(-8x^6+48x^4-54x^2+6\right).$$

Ответ: $y'''=e^{-x^2}\cdot\left(-8x^6+48x^4-54x^2+6\right)$.

Задание 5

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\ln(\operatorname{ctg} t) \\ y=\sec^2 t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t-1) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2 \\ y = \dfrac{\cos t^2}{\sin^2 t} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}(2^{e^t}) \\ y = \ln\left(\mathrm{tg}\, e^t\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = t\,(t \cos t - 2 \sin t) \\ y = t\,(t \sin t + 2 \cos t) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, e^{2t} \\ y = \sqrt{1 + e^{2t}} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \\ y = t\sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t} \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin\dfrac{1}{t} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = (t-1)^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2 + 1}{t^3} \\ y = \sin(\dfrac{t^3}{3} + t) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t \\ y = \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) - \ln(1 + t) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \\ y = (\arccos t)^2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\dfrac{t+1}{t-1} \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \dfrac{\arcsin(1 - t^2)}{1 + t^2} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \sqrt{t - t^2} - \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}} \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}\,\arcsin\sqrt{t} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = t \sin t + \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 2\mathrm{tg}\, t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \ln(1-\sin t) - \ln(1+\sin t) \\ y = \operatorname{tg}^2 t + \ln\cos t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t} \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1} \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \ln(1-t) - \ln(1+t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2 \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 2\ln\operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 2t\cos t \\ y = 2t\sin t \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$

32. $\begin{cases} x = t(1-\sin t) \\ y = t\cos t \end{cases}$

33. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^3 \\ y = t^2\cos t \end{cases}$

34. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^3\right) \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}.$

Пример выполнения задания 5

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}}$

$$y'_t = \left(\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \frac{\left(t^3\right)'\sqrt{1-t^2} - t^3\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{1-t^2} = \frac{3t^2 \cdot \sqrt{1-t^2} + t^3\,\dfrac{(1+2t)}{2\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} =$$

$$= \frac{3t^2\left(1-t^2\right)+t^4}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3t^2-3t^4+t^4}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3t^2-2t^4}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x'_t = \left(\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{1(-2t)}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Подставим все в формулу:

$$y'_x = \frac{3t^2-2t^4}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} : \frac{-t}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{t\left(3t-2t^3\right)}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(-t)} = \frac{-3t+2t^3}{1-t^2}.$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{-3t+2t^3}{1-t^2}$.

Задание 6

Найти производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \mathrm{sh}^2 t \\ y = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t} \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sec t \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+2\cos t} \\ y = \dfrac{\sin t}{1+2\cos t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1} \\ y = \ln t \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t \\ y = \operatorname{th}^2 t \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = t+\sin t \\ y = 2+\cos t \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 2-\cos t \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^4 t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 4(2+\cos t) \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\sqrt{2}t \\ y = t^2 \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t} \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2} \\ y = \dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sec^2 t \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^5 t \end{cases}$

34. $\begin{cases} x = \sin t + t\cos t \\ y = 2(1-\sin t) \end{cases}.$

Пример выполнения задания 6

Найти производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{2}{t^2} \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{y''_{xx} = \dfrac{y''_t x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x')^3}}$.

Для этого вычислим производные:

$$x'_t = \left(\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_t = \left(2 \cdot t^{-2}\right)' = 2\,(-2)\,t^{-3} = \frac{-4}{t^3}$$

$$y''_t = -4 \cdot (-3)\,t^{-4} = \frac{12}{t^4}$$

$$x''_t = \frac{-1\sqrt{1-t^2} + t\,\dfrac{1(-2t)}{2\sqrt{1-t^2}}}{\left(1-t^2\right)} = \frac{-1+t^2-t^2}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставив в формулу, получаем: $y''_{xx} = \dfrac{16-12t^2}{t^6}$.

Ответ: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \dfrac{16-12t^2}{t^6}$.

Задание 7

Найти производную y', применяя логарифмическое дифференцирование.

1. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln \operatorname{arctg} x}$

2. $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$

3. $y=(\sin x)^{5e^x}$

4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$

5. $y=(\ln x)^{3x}$

6. $y=x^{\arcsin x}$

7. $y=(\operatorname{ctg} x)^{5e^x}$

8. $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$

9. $y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$

10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$

11. $y=(x\sin x)^{\ln x\sin x}$

12. $y=(x-5)^{\cos x}$

13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$

14. $y=x^{\sin x^3}$

15. $y=(x^2-1)^{\sin x}$

16. $y=(x^4+1)^{\operatorname{ctg} x}$

17. $y=(\sin x)^{5x}$

18. $y=(x^2+2)^{\cos x}$

19. $y=x^{5^x}$

20. $y=x^{3^x}3^x$

21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{-x}}$

22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$

23. $y=x^{e^{\cos x}}$

24. $y=x^{2^x}5^x$

25. $y=x^{e^{\sin x}}$

26. $y=(\operatorname{tg} x)^{\ln\operatorname{tg} x}$

27. $y=x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$

28. $y=(x^8+1)^{\ln x}$

29. $y=x^{2x}2^x$

30. $y=(\cos 2x)^{\ln\cos 2x}$

31. $y=x^{e^x}x^9$

32. $y=(\arcsin x)^{\ln\arcsin x}$

33. $y=(\sin 2x)^{\ln\cos 2x}$

34. $y=(\arccos x)^{\ln\arccos x}$

35. $y=(\operatorname{ctg} x)^{\ln\operatorname{ctg} x}$.

Пример выполнения задания 7

Найти производную y', применяя логарифмическое дифференцирование.

$$y=(\operatorname{ctg} x)^{\ln\operatorname{ctg} x}$$

Решение. Прологарифмируем обе части нашего выражения

$\ln y = \ln(\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{ctg} x)}$, или $\ln y = (\ln(\operatorname{ctg} x))^2$.

Продифференцируем равенство справа и слева

$$\frac{1}{y} y' = 2\ln(\operatorname{ctg} x) \cdot \frac{(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg} x},$$

$$\frac{y'}{y} = 2\ln(\operatorname{ctg} x)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$ Выразим y':

$$y' = y\left(\frac{-4\ln(\operatorname{ctg} x)}{\sin(2x)}\right),$$

$$y' = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{ctg} x)} \cdot \left(\frac{-4\ln(\operatorname{ctg} x)}{\sin(2x)}\right).$$

Ответ: $y' = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{ctg} x)} \cdot \left(\frac{-4\ln(\operatorname{ctg} x)}{\sin(2x)}\right)$.

Задание 8

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (см. табл.1).

Таблица 1

№ варианта	$f(x)$	x_0
1	$\sqrt[3]{x}$	7,76
2	$\sqrt[3]{x^3 + 7x}$	1,012
3	$\frac{1}{2}(x + \sqrt{5 - x^2})$	0,98
4	$\sqrt[3]{x}$	27,54
5	$\arcsin x$	0,08

Продолжение табл. 1

№ варианта	$f(x)$	x_0
6	$\sqrt[3]{x^2+2x+5}$	0,97
7	$\sqrt[3]{x}$	26,46
8	$\sqrt{x^2+x+3}$	1,97
9	x^{11}	1,021
10	$\sqrt[3]{x^3+4x+3}$	1,03
11	x^{21}	0,998
12	$\sqrt[3]{x^2}$	1,21
13	x^6	2,01
14	$\sqrt[3]{x^2+5x+2}$	0,83
15	x^7	1,996
16	$\sqrt{2x^2+x+1}$	1,016
17	$\sqrt{4x-1}$	2,56
18	$\sqrt[7]{x}$	1,14
19	$\sqrt[3]{x}$	8,36
20	$\sqrt[4]{x}$	15,164
21	x^7	2,002
22	$\sqrt{4x-3}$	1,78
23	$\sqrt[5]{x}$	0,98
24	$\sqrt[3]{3x+\cos x}$	0,01
25	$\sqrt[5]{x^2}$	1,03
26	$\sqrt[5]{1+x}$	0,1
27	$\sqrt{1+x+\sin x}$	0,01

Окончание табл. 1

№ варианта	$f(x)$	x_0
28	$\sqrt{x^2-1}$	2,037
29	$\sqrt[4]{2x-\ln x}$	1,02
30	$\sqrt{x^2+5}$	1,97
31	$\sqrt[4]{5x+1}$	2,98
32	$\sqrt{2x+1}$	1,58
33	$\sqrt{3x-4}$	2,77
34	$\sqrt{x^2-5}$	3,1

Пример выполнения задания 8

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x)=\ln x$ в точке $x=0{,}99$.

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x}$.

Пусть $x_0=1$, тогда $\Delta=-0{,}01$

$f(x_0)=0$, $\quad y'=\dfrac{1}{x}$, $\quad f'(1)=1$.

Таким образом, $f(0{,}99)\approx 0-0{,}01=-0{,}01$.

Ответ: $-0{,}01$.

Задача 9

Найти пределы функций с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos^2 x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

8. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$

12. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x-\pi)^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

19. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

21. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-0{,}5-\cos 2x}{\sin(\pi-3x)}$

23. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg}x}$

25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$

31. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$.

Пример выполнения задания 9

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ имеем неопределенность, используем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1\right)'}{\left(\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{-\sin x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \Rightarrow$$

Снова применяем правило Лопиталя

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1\right)'}{(-\sin x+x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-\cos x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \Rightarrow$$

Еще раз применяем

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - x - 1\right)'}{\left(-\cos x + 1\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(\sin x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 10

Найти пределы функции с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(3-x)^2-(3+x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^4-(1+x)^4}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^3-(1+x)^3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-x)^4+(1+x)^4}{(1+x)^4-(1-x)^3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6-x)^2-(6+x)^2}{(6+x)^2-(1-x)^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x+1)^2}{(x-1)^3-(x+1)^3}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2x)^3-8x^3}{(1+2x)^2+4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-4x)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-(x+2)^3}{(4-x)^3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^3}{(x+1)^2-(x+1)^3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x+1)^3-(x-2)^3}{x^2+2x-3}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{(x+4)^3+(x+5)^3}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^3+(x+4)^3}{(x+3)^4-(x-4)^4}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-2x}{(x+1)^4-(x-1)^4}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3-(x+5)^3}{(3x-1)^3+(2x+3)^3}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+10)^2+(3x+1)^2}{(x+6)^3-(x+1)^3}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3+(3x+1)^3}{(2x+3)^3-(x-7)^3}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(2x+3)^3}{(2x+1)^2+(2x+3)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-x^4}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^4-(x-2)^4}{(x+5)^2+(x-2)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^4+2x^2-1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+3x}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+3)^2}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2-(x+1)^2}{x^2+x+1}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{x^3-2x}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^2-(x+1)^2}{x^2-x+1}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2+(x+4)^2}{(x-1)^2}$.

Пример выполнения задания 10

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3+(x+1)^3}{x^3-1}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3+(x+1)^3}{x^3-1} \Rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow$$

Применим правило Лопиталя

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\left((x-1)^3+(x+1)^3\right)'}{\left(x^3-1\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(x-1)^2+3(x+1)^2}{3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow$$

еще раз используем правило Лопиталя

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{6(x-1)+6(x+1)}{6x} = \frac{12x}{6x} = 2\,.$$

Ответ: 2.

2.2. Исследование функций с помощью производных

Задание 1

Исследовать функцию на экстремум с помощью производной первого порядка, найти интервалы монотонности функции.

1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

2. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

3. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2 + 8}$

4. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}$

5. $y = 1 - \sqrt[3]{2x + x^2}$

6. $y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}$

7. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{x^2 - 2x + 9}$

8. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$

9. $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6$

10. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{x^2 + 4x + 12}$

11. $y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}$

12. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$

13. $y = \sqrt[3]{x(x+2)}$

14. $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8$

15. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2+6x+17}$

16. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$

17. $y = 2x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$

18. $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$

19. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{x^2-6x+17}$

20. $y = \sqrt[3]{x^2+6x+8}$

21. $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$

22. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2-4x+3}$

23. $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$

24. $y = \sqrt[3]{x^2-4x-5}$

25. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x - 2$

26. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x+2)^2}}{x^2+8x+24}$

27. $y = 2x - 4 - 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$

28. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2+10x+33}$

29. $y = 3\sqrt[3]{(x+2)^2} - 2x - 4$

30. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{x^2-8x+24}$

31. $y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$

32. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2+2x+9}$

33. $y = \dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$

34. $y = \dfrac{\sqrt[3]{2(2x+1)^2}}{x^2+4x+5}$.

Пример выполнения задания 1

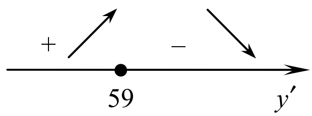
Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x+5)^2} - \dfrac{1}{6}x - 6$ на экстремум с помощью производной первого порядка, найти интервалы монотонности функции.

Решение. Вычислим производную от заданной функции $y' = \frac{2}{3}(x+5)^{-1/3} - \frac{1}{6}$ и приравняем ее к нулю: $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x+5}} = \frac{1}{6}$. Найдем точки, в которых производная равна нулю или не существует

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+5}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x+5}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{x+5} = 4, \quad x+5 = 64, \quad x = 59 .$$

Исследуем знак производной:



$$y_{\max}(59) = \sqrt[3]{(64)^2} - \frac{1}{6}\cdot 59 - 6 = \frac{1}{6} .$$

Ответ: $y_{\max}(59) = \frac{1}{6}$.

На интервале $(-\infty;\, 59)$ функция непрерывно возрастает, а на промежутке $(59;\, +\infty)$ непрерывно убывает.

Задание 2

Убедиться, что x_0 – критическая точка функции $y(x)$ (см. табл. 2), и исследовать поведение функции в окрестности этой точки с помощи производных высших порядков.

Таблица 2

№ варианта	$y(x)$	x_0
1	$x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$	2
2	$4x - x^2 - 2\cos(x-2)$	2

Продолжение табл. 2

№ варианта	$y(x)$	x_0
3	$6e^{x-2}-x^3+3x^2-6x$	2
4	$2\ln(x+1)-2x+x^2+1$	0
5	$2x-x^2-2\cos(x-1)$	1
6	$\cos^2(x+1)+x^2+2x$	– 1
7	$2\ln x+x^2-4x+3$	1
8	$1-2x-x^2-2\cos(x+1)$	– 1
9	$x^2+6x+8-2e^{x+2}$	– 2
10	$4x+x^2-2e^{x+1}$	– 1
11	$(x+1)\sin(x+1)-2x-x^2$	– 1
12	$6e^{x-1}-3-x^3$	1
13	$2x+x^2-(x+1)\ln(2+x)$	– 1
14	$\sin^2(x+1)-2x-x^2$	– 1
15	$x^2+4+\cos^2(x+2)$	– 2
16	$x^2+2\ln(x+2)$	– 1
17	$4x-x^2+(x-2)$	2
18	$6e^x-x^3-3x^2-6x-5$	0
19	$x^2-2x-2e^{x-2}$	2
20	$\sin^2(x+2)-x^2-4x-4$	– 2
21	$\cos^2(x-1)+x^2-2x$	1
22	$x^2-2x-(x-1)\ln x$	1
23	$(x-1)\sin(x-1)+2x-x^2$	1

Окончание табл. 2

№ варианта	$y(x)$	x_0
24	$x^2-4x+\cos^2(x-2)$	2
25	$x^4+4x^3+12x^2+24(x+1-e^x)$	0
26	$\sin^2(x-2)-x^2+4x-4$	2
27	$6e^{x+1}-x^3-6x^2-15x-16$	– 1
28	$\sin^2 x+\sin x-x$	0
29	$\sin^2(x-1)-x^2+2x$	1
30	$\cos x+\operatorname{ch} x$	0
31	x^2-2e^{x-1}	1
32	$6\ln x-2x^3+9x^2+18x$	1
33	$-x\ln(x-1)+2\ln(x-1)+x^2-4x+8$	2
34	$x\sin x(x+1)-x^2-2x+\sin(x+1)+9$	– 1

Пример выполнения задания 2

Убедиться, что $x_0=0$ – критическая точка функции $y(x)=x^2+1+2\ln(x+1)-2x+4$, и исследовать поведение функции в окрестности этой точки с помощи производных высших порядков.

Решение. Вычислим y':

$y'=2x+\dfrac{2}{x+1}-2$ при $x=0$,

$y'=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ является критической точкой.

Вычислим y'': $\quad y''=2-\dfrac{2}{(x+1)^2}$, при $x=0$, $y''=0$.

Вычислим y''': $y''' = \dfrac{4}{(x+1)^3}$, при $x = 0$, $y''' = 4$.

Так как порядок этой производной является нечетным числом и сама производная отлична от нуля, то в x_0 экстремума нет.

Вторая производная тоже не меняет знак относительно $x_0 = 0$, следовательно, $x_0 = 0$ это критическая точка.

Задание 3

Найти асимптоты и построить схематически график функции.

1. $y = \dfrac{17 - x^2}{4x - 5}$

2. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}$

3. $y = \dfrac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$

4. $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

5. $y = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$

6. $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}$

7. $y = \dfrac{2x^2 - 6}{x - 2}$

8. $y = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

9. $y = \dfrac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$

10. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$

11. $y = \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{9x^2 - 4}}$

12. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$

13. $y = \dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}$

14. $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$

15. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$

16. $y = \dfrac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$

17. $y = \dfrac{21 - x^2}{7x + 9}$

18. $y = \dfrac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

19. $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}$

20. $y = \dfrac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$

21. $y = \dfrac{x^2 - 11}{4x - 3}$

22. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$

23. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$

24. $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$

25. $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 2}$

26. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$

27. $y = \dfrac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

28. $y = \dfrac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$

29. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}$

30. $y = \dfrac{x^2 + 8}{\sqrt{x^2 - 4}}$

31. $y = \dfrac{14 - 4x - x^2}{4x + 3}$

32. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$

33. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 1}$

34. $y = \dfrac{15 - 7x + x^2}{2x + 4}$.

Пример выполнения задания 3

Найти асимптоты и построить схематически график функции

$$y = \frac{x^2 + 4x + 5}{3 - 2x}.$$

Решение. 1. Функция определена во всех точках, кроме $x = \frac{3}{2}$. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pm 0} \frac{x^2+4x+5}{3-2x} = \frac{\frac{9}{4}+6+5}{3-(3\pm 0)} = \frac{13{,}25}{\mp 0} = \mp\infty .$$

Таким образом, $x = \frac{3}{2}$ – вертикальная асимптота.

2. Проверим поведение функции на бесконечности, а значит, выясним наличие горизонтальной асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+5}{3-2x} = \infty \Rightarrow$ горизонтальной асимптоты нет.

3. Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$. Для этого вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - k\cdot x \right].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+5}{(3-2x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+5}{3x-2x^2} =$$

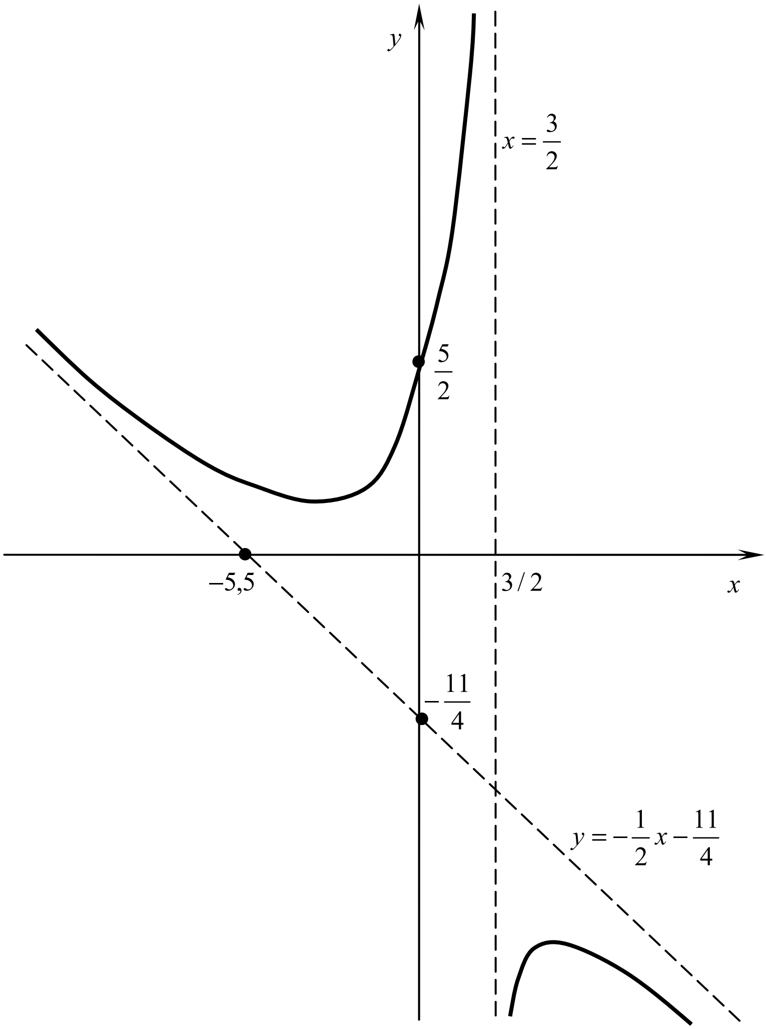
(воспользуемся правилом Лопиталя)

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{3-4x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+4x+5}{3-2x} + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+8x+10+3x-2x^2}{2(3-2x)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{11x+10}{6-4x} = -\frac{11}{4}.$$

Итак, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$ – наклонная асимптота.



Задание 4

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика данной функции.

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

2. $y=\sqrt{x^3+1}$

3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

4. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

5. $y=x^2(x^2-1)^3$

6. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

7. $y=(x^2-1)^3$

8. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

9. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

10. $y=x^2-e^{-x}$

11. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

12. $y=x^2e^{-x^2}$

13. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

14. $y=xe^{-x}$

15. $y=x-2\operatorname{arctg}x$

16. $y=x+\operatorname{arctg}x$

17. $y=\ln(x^2+1)$

18. $y=\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg}x$

19. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

20. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

21. $y=e^{2x-x^2}$

22. $y=\sqrt[3]{(x-5)^5}+2$

23. $y=(1+x^2)\,e^{-x^2}$

24. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

25. $y=x\sqrt{4-x^2}$

26. $y=4x^5-5x^4+3x-7$

27. $y=3x^2-x^3+5$

28. $y=\dfrac{8}{4+x^2}$

29. $y = e^{-x^2}$

30. $y = \ln(1 + x^2)$

31. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

33. $y = x^3(x^3+1)^2$

34. $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$.

Пример выполнения задания 4

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^3}$.

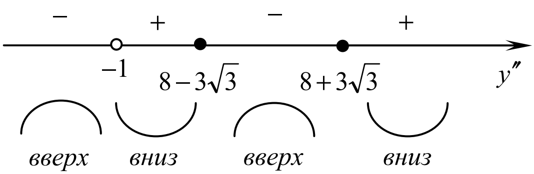
Решение. Необходимо найти: y''

$$y' = \frac{(x-2)(8-x)}{(x+1)^4},$$

$y'' = \dfrac{2x^2 - 32x + 74}{(x+1)^5}$. Если $y'' = 0$ в некоторой точке и есть смена знака второй производной в этой точке, то это абсцисса точки перегиба.

Производная равна нулю, если $2x^2 - 32x + 74 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 8 - 3\sqrt{3} \\ x_2 = 8 + 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Производная не существует, а функция не определена в точке $x_3 = -1$. Проверим смену знака второй производной через эти точки.



Таким образом $\left.\begin{aligned} x_1 &= 8 - 3\sqrt{3} \\ x_2 &= 8 + 3\sqrt{3} \end{aligned}\right\}$ абсциссы точек перегиба.

На интервале $x \in (-\infty;\, -1) \cup \left(8 - \sqrt[3]{3};\, 8 + \sqrt[3]{3}\right)$ график функции выпуклый вверх, а при $x \in \left(-1;\, 8 - \sqrt[3]{3}\right) \cup \left(8 + \sqrt[3]{3};\, +\infty\right)$ – выпуклый вниз.

Задание 5

Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

2. $y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x - 1}$

3. $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$

4. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$

5. $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$

6. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

7. $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$

8. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

9. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$

10. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$

11. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

12. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

13. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$

14. $y = \dfrac{3\left(3 + 2x - x^2\right)}{x^2 - 2x + 13}$

15. $y = -\dfrac{8x}{x^2 + 4}$

16. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$

18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$

19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$

21. $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$

22. $y=\dfrac{4}{3-2x-x^2}$

23. $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$

24. $y=\dfrac{1}{x^4-1}$

25. $y=-\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

26. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$

27. $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$

28. $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$

29. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$

30. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$

31. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$

32. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

33. $y=\dfrac{x^4-12}{x^3}$

34. $y=\dfrac{x^3-12x+18}{x^3}$.

Пример выполнения задания 5

Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. О.Д.З. $(D(f)) \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. Не является четной или нечетной.

3. $\left.\begin{array}{l} x=0,\ y=0 \\ y=0,\ x=0 \end{array}\right\}$ точки пересечения с осями.

4. $x=-1$ – точка разрыва. Исследуем характер разрыва:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \frac{(-1-0)^2}{2(-1+1)^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \frac{(-1+0)^3}{2(-1+1)^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty,$$

таким образом, разрыв бесконечный II рода.

Найдем асимптоты графика функции:
$x=-1$ – вертикальная асимптота, т.к. в этой точке разрыв II рода.

Горизонтальной асимптоты нет, т.к. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty$.

Проверим наличие наклонной асимптоты, для этого вычислим пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x^3+4x+2x} = \frac{1}{2}.$$

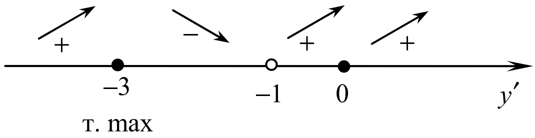
Далее

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} =$$

$$= -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+x}{2x^2+4x+2} = -1.$$

Таким образом, $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ – наклонная асимптота.

5. Исследуем функцию с помощью производной первого порядка $y' = \frac{1}{2}\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. При $x=0$ и $x=-3$ производная равна нулю, а при $x=-1$ – не существует. Проверим смену знака через эти точки:

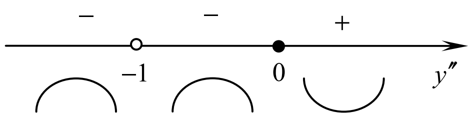


$y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}$.

Так как в точке $x=-1$ функция не существует, то эта точка не является критической точкой.

Так как в точке $x=0$ производная не меняет знак, то эта точка не является точкой экстремума.

6. Исследуем функцию с помощью производной второго порядка $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. При $x=0$ производная равна нулю, а при $x=-1$ – не существует. Проверим смену знака производной:

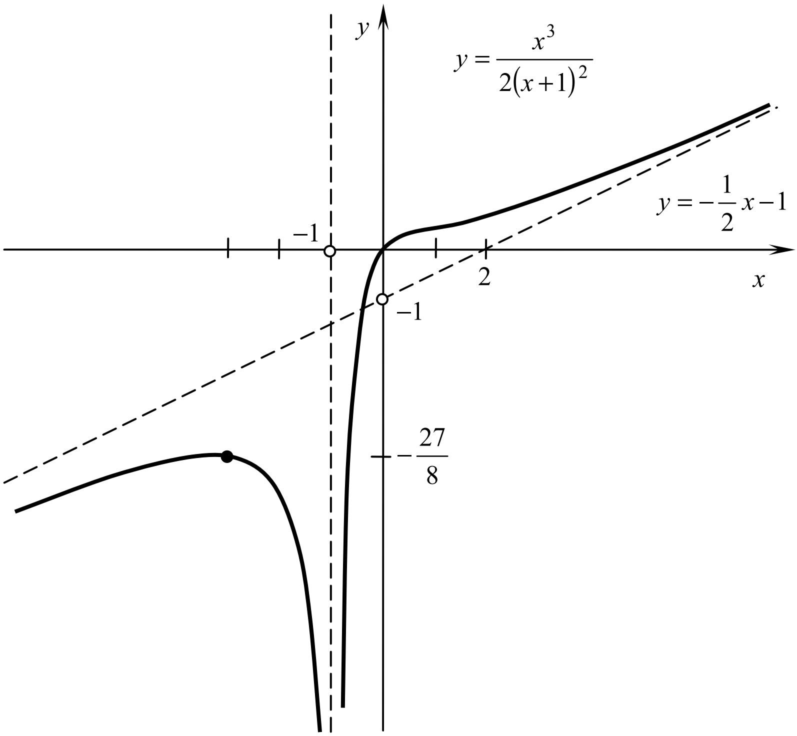


$y'' < 0,\ \ x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ – функция выпукла вверх;

$y'' > 0,\ \ x \in (0; +\infty) \cup (-1; 0)$ – функция выпукла вниз;

$x = 0$ – абсцисса точки перегиба, т.к. в окрестности этой точки вторая производная меняет знак.

Построим график:



Задание 6

Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=\frac{2}{1+x^2}$ **2.** $y=\frac{x}{1+x^2}$ **3.** $y=\frac{x^3}{4+x^2}$

4. $y=\frac{4x}{16+x^2}$ **5.** $y=\frac{(x+3)^2}{9+x^2}$ **6.** $y=\frac{6x}{9+x^2}$

7. $y=\frac{2x}{4+x^2}$ **8.** $y=-\frac{2x}{4+x^2}$ **9.** $y=\frac{2x}{9+x^2}$

10. $y=\dfrac{9x}{9+x^2}$ **11.** $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ **12.** $y=\dfrac{x+2}{4+x^2}$

13. $y=\dfrac{(x+2)^2}{4+x^2}$ **14.** $y=\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ **15.** $y=\dfrac{1-x^2}{4+x^2}$

16. $y=\dfrac{6}{3+x^2}$ **17.** $y=\dfrac{x}{2+x^2}$ **18.** $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$

19. $y=\dfrac{3-x^2}{9+x^2}$ **20.** $y=\dfrac{2}{4+x^2}$ **21.** $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

22. $y=\dfrac{(3-x)^2}{9+x^2}$ **23.** $y=-\dfrac{x}{1+x^2}$ **24.** $y=\dfrac{2x}{2+x^2}$

25. $y=\dfrac{x^2}{5+x^2}$ **26.** $y=\dfrac{5-x^2}{5+x^2}$ **27.** $y=\dfrac{(x+2)^2}{4+x^2}$

28. $y=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ **29.** $y=\dfrac{(x-2)^2}{4+x^2}$ **30.** $y=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$

31. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ **32.** $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **33.** $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

34. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

Пример выполнения задания 6

Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. О.Д.З.: $x\neq 0,\ \ x\in(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$.

2. Функция не является четной или нечетной.

3. $y=0,\ x=-\sqrt[3]{4}$ – точка пересечения с осью Ox. С осью Oy пересечения нет.

4. Точка разрыва $x=0$, причем $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\dfrac{4}{+0}=+\infty$, следовательно, $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика. Проверим поведение функции на бесконечности:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=0 \Rightarrow$ горизонтальной асимптоты нет.

Проверим наличие наклонной асимптоты, для этого вычислим пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0 \Rightarrow$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

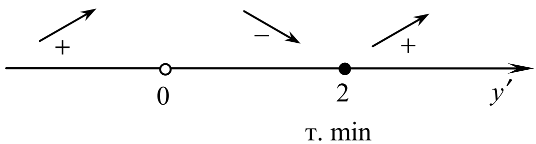
5. Исследуем функцию с помощью производной первого порядка:

$y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}$;

$y'=0$ при $x=2$,

при $x=0$ – производная и функция не существуют.

Проверим смену знака производной через эти точки:

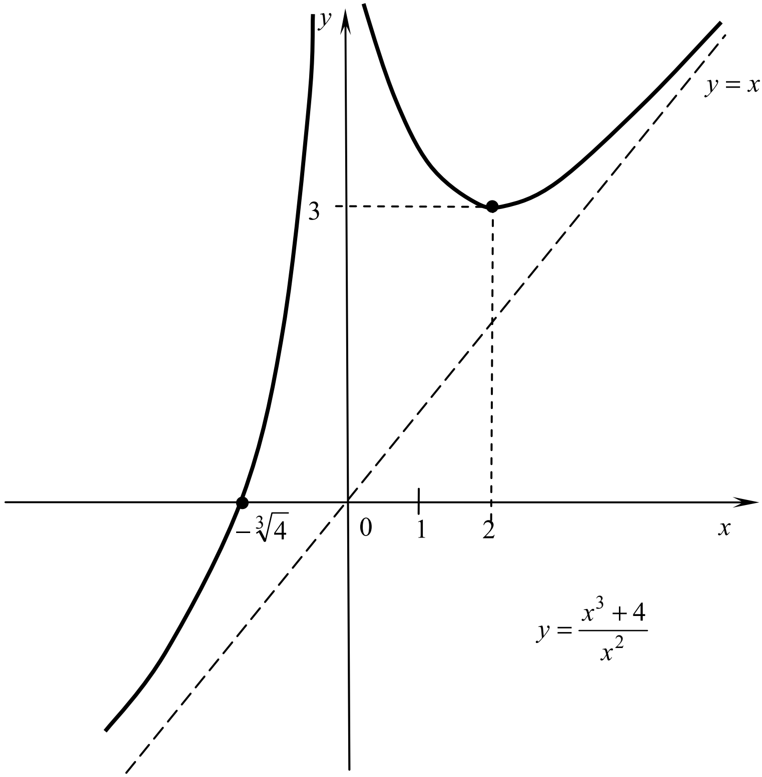


$y_{\min}(2)=\dfrac{12}{4}=3$.

6. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и ее точки перегиба, т.е. выполним исследование с помощью второй производной: $y''=\dfrac{24}{x^2}$,

т.к. $y'' > 0$, то график всюду вогнут, и точек перегиба нет.

Построим график функции:



Задание 7

Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y = (2x+3)e^{-2(x+1)}$ **2.** $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$

3. $y = 3\ln\dfrac{x}{x-3} - 1$ **4.** $y = (3-x)e^{x-2}$

5. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$

6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$

7. $y=(x-2)e^{3-x}$

8. $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$

9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$

10. $y=(2x+1)e^{x+1}$

11. $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$

12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$

13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$

14. $y=\dfrac{e^{4+x}}{4+x}$

15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$

16. $y=(4-x)e^{x-3}$

17. $y=\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$

18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$

19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$

20. $y=-\dfrac{e^{-2(x+2)}}{x+2}$

21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$

22. $y=-(x+1)e^{3(x+2)}$

23. $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$

24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$

25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$

26. $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$

27. $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$

28. $y=(x+4)e^{-(x+3)}$

29. $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$

30. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$

31. $y=2\ln\dfrac{x-1}{x}+1$

32. $y=\ln\dfrac{x}{x-1}-2$

33. $y=x^2\,e^{-x}$

34. $y=\ln\dfrac{x^2}{x-1}+1$.

Пример выполнения задания 7

Провести полное исследование функции $y=\left(x^2-2x\right)e^x$ и построить ее график.

Решение.

1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. При $y=0$ имеем пересечение с осью Ox, это точки $(0;\,0)$ и $(2;\,0)$. Пересечение с осью Oy в точке $(0;\,0)$.

4. Функция непрерывна, а значит, вертикальной асимптоты нет. Проверим наличие горизонтальной асимптоты, для этого вычислим предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)\cdot e^x=+\infty\cdot e^{+\infty}=+\infty \;\Rightarrow$
справа горизонтальной асимптоты нет.

Проверим слева:

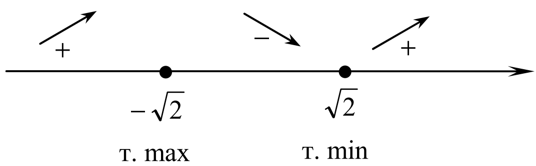
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)= \text{ воспользуемся правилом Лопиталя}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\frac{2}{e^{+\infty}}=0\,.$$

Таким образом, $y=0$ – горизонтальная асимптота слева.

5. Вычислим производную $y'=\left(x^2-2\right)e^x$.

Она равна нулю при $x=\pm\sqrt{2}$. Проверим смену знака через эти точки



Вычислим экстремальные значения функции

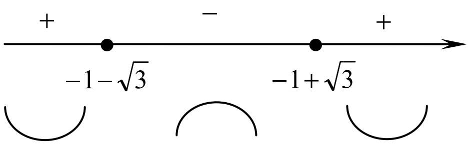
$y_{\max}\left(-\sqrt{2}\right)=\left(2+2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}} \approx 1{,}17$

$y_{\min}\left(\sqrt{2}\right)=\left(2-2\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}} \approx -3{,}41$

6. Исследуем функцию второй производной

$y'' = 2xe^x + \left(x^2 - 2\right)e^x = e^x\left(x^2 + 2x - 2\right) = 0$,

$e^x > 0, \quad x^2 + 2x - 2 = 0, \quad x_1 = -1-\sqrt{3}, \quad x_2 = -1+\sqrt{3}$.

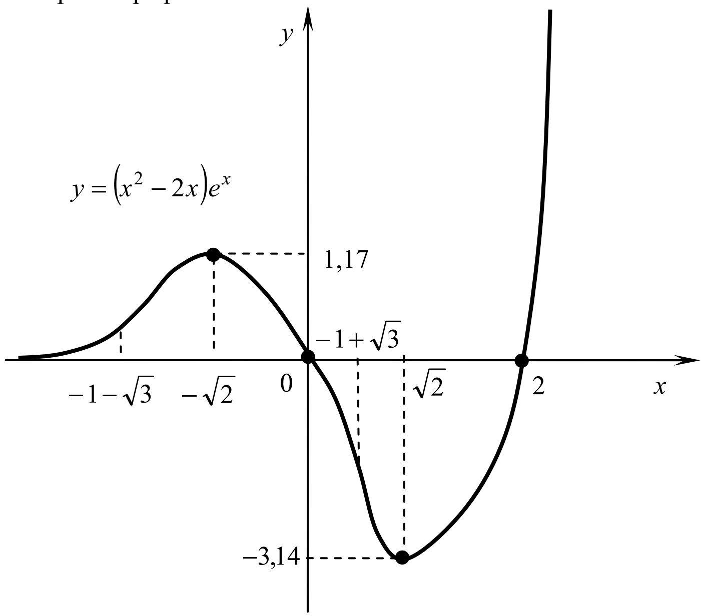


Точки x_1 и x_2 – абсциссы точек перегиба,

выпуклость вверх $x \in \left(-1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3}\right)$,

выпуклость вниз $x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

Построим график:



ТЕМА 3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Неопределенный интеграл

Задание 1

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int e^{4\sin x-3}\cdot\cos x dx$

2. $\int e^{3\cos x+1}\cdot\sin x dx$

3. $\int e^{7\sin x+2}\cdot\cos x dx$

4. $\int 2^{-\cos x}\cdot\sin x dx$

5. $\int e^{-\cos x+2}\cdot\sin x dx$

6. $\int e^{4-\cos x}\cdot\sin x dx$

7. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{3\cos^2 x}dx$

8. $\int \frac{e^{3\operatorname{ctg} x}}{5\sin^2 x}dx$

9. $\int 3\cos x\cdot e^{2\sin x}dx$

10. $\int \frac{e^{2\operatorname{tg} x-1}}{\cos^2 x}dx$

11. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x+4}}{\cos^2 x}dx$

12. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x-12}}{7\cos^2 x}dx$

13. $\int \frac{e^{3\operatorname{ctg} x+3}}{\sin^2 x}dx$

14. $\int \frac{e^{4\operatorname{tg} x+1}}{3\cos^2 x}dx$

15. $\int \cos x \cdot e^{\frac{\sin x}{3}} dx$

16. $\int \sin x \cdot e^{5\cos x + 10} dx$

17. $\int 2^{5\cos x - 3} \sin x dx$

18. $\int 4^{2\cos x + 3} \sin x dx$

19. $\int 5^{7\sin x + 1} \cdot \cos x dx$

20. $\int 3^{4\cos x + 5} \cdot \sin x\, dx$

21. $\int \frac{2^{5\,\mathrm{tg}\, x - 4}}{\cos^2 x} dx$

22. $\int 2^{3\sin x + 2} \cdot \cos x dx$

23. $\int 2^{2\cos x - 5} \cdot \sin x dx$

24. $\int 7^{3\cos x - 1} \cdot \sin x dx$

25. $\int \cos x \cdot e^{\sin x - 7} dx$

26. $\int \sin x \cdot e^{\frac{\cos x}{2}} dx$

27. $\int \cos x \cdot e^{3\sin x - 7} dx$

28. $\int \frac{3^{\mathrm{tg}\, x - 1}}{\cos^2 x} dx$

29. $\int \frac{2^{\mathrm{ctg}\, x - 3}}{\sin^2 x} dx$

30. $\int \frac{2^{2\,\mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x} dx$

31. $\int \frac{e^{1 - \mathrm{ctg}\, x}}{\sin^2 x} dx$

32. $\int \sin x \cdot e^{0,5\cos x - 5} dx$

33. $\int 10^{2\cos x - 1} \cdot \sin x\, dx$

34. $\int \frac{5^{1 - \mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x} dx$.

Пример выполнения задания 1

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int 6^{3 - 2\sin x} \cdot \cos x\, dx$.

Решение. Пусть $t = 3 - 2\sin x$, тогда $dt = -2\cos x dx$.

$$\int 6^{3-2\sin x} \cdot \cos x dx = \int 6^t \cdot \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6^t}{\ln 6} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6^{3-2\sin x}}{\ln 6} + C.$$

Можно выполнить решение с помощью внесения множителя под знак дифференциала: т.к. $d\left(3-2\sin x\right)=-2\cos x\,dx$, то

$$\int 6^{3-2\sin x}\cdot\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int 6^{3-2\sin x}\cdot d\left(3-2\sin x\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{6^{3-2\sin x}}{\ln 6}+C.$$

Задание 2

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{(4-7x)\,dx}{(4x-3{,}5x^2)^2}$

2. $\int\frac{(3x^2-2)\,dx}{x^3-2x+3}$

3. $\int\frac{(10x+1)\,dx}{5x^2+x-1}$

4. $\int\frac{(7-2x)\,dx}{x^2-7x}$

5. $\int\frac{6x-7x^6}{x^7-3x^2}\,dx$

6. $\int\frac{5x^4+6x^2}{x^5+2x^3+10}\,dx$

7. $\int\frac{(6x-3x^2)\,dx}{x^3-3x^2+18}$

8. $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^2}$

9. $\int\frac{(x^3-x)\,dx}{(x^4-2x^2+7)^3}$

10. $\int\frac{x^3dx}{(x^4+1)^8}$

11. $\int\frac{(6x^5-3)\,dx}{x^6-3x+4}$

12. $\int\frac{(5x^4-12)\,dx}{x^5-12x-5}$

13. $\int\frac{(10x^4-3)\,dx}{(2x^5-3x+1)^2}$

14. $\int\frac{(5x^4-4x)\,dx}{(x^5-2x^2+1)^2}$

15. $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{5x^3+15x-13}$

16. $\int\frac{(x^4-2)\,dx}{(x^5-10x+8)^3}$

17. $\int\frac{(x^3+1)\,dx}{(8x^4+32x-7)^3}$

18. $\int\frac{(3x+2)\,dx}{(1{,}5x^2+2x+5)^4}$

19. $\int \frac{(15x^2-8)\,dx}{(5x^3-8x)^5}$

20. $\int \frac{(42x+3)\,dx}{(21x^2+3x-1)^3}$

21. $\int \frac{(x^3+x)\,dx}{x^4+2x^2-8}$

22. $\int \frac{(4x^3+9x^2)\,dx}{(x^4+3x^3-7)^3}$

23. $\int \frac{(x^4-x+1)\,dx}{4x^5-10x^2+20x-1}$

24. $\int \frac{(1+x)\,dx}{10+3x+1{,}5x^2}$

25. $\int \frac{(x^4-x)\,dx}{2x^5-5x^2+3}$

26. $\int \frac{(3x^2+20x)\,dx}{(x^3+10x^2-9)^2}$

27. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(3x^3-9x+4)^5}$

28. $\int \frac{(x-1)\,dx}{4x^2-8x+9}$

29. $\int \frac{(10x+1)\,dx}{(5x^2+x-7)^2}$

30. $\int \frac{(7x^6-3x^2)\,dx}{(x^7-x^3+5)^2}$

31. $\int \frac{(9x^2-7)\,dx}{(3x^3-7x)^3}$

32. $\int \frac{(6x^2-3)\,dx}{(2x^3-3x+4)^3}$

33. $\int \frac{(x^3-2)\,dx}{x^4-8x-1}$

34. $\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{(x^3+3x^2-2)^2}$.

Пример выполнения задания 2

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int \frac{(2x^2+x)\,dx}{(4x^3+3x^2-5)^3}$.

Решение. Пусть $t=4x^3+3x^2-5$, тогда $dt=6\left(2x^2+x\right)dx$

$$\int \frac{\left(2x^2+x\right)dx}{\left(4x^3+3x^2-5\right)^3}=\int \frac{\frac{dt}{6}}{t^3}=\frac{1}{6}\cdot\int t^{-3}dt=-\frac{1}{12t^2}+C=-\frac{1}{12\left(4x^3+3x^2-5\right)^2}+C\,.$$

Решение можно осуществить внесением множителя под знак дифференциала:

$$\int \frac{\left(2x^2+x\right)dx}{\left(4x^3+3x^2-5\right)^3}=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{\left(12x^2+6x\right)dx}{\left(4x^3+3x^2-5\right)^3}=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{d\left(4x^3+3x^2-5\right)dx}{\left(4x^3+3x^2-5\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\left(4x^3+3x^2-5\right)^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{12\left(4x^3+3x^2-5\right)^2}+C.$$

Задание 3

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{5-7\ln^2 x}{x}dx$ **2.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{\ln x}\cdot x}$ **4.** $\int \frac{3+\ln x^2}{x}dx$

5. $\int \frac{2x-\ln x^3}{x}dx$ **6.** $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{3-2\ln x}}{x}dx$ **8.** $\int \frac{\ln\sqrt{x}-x}{x}dx$

9. $\int \frac{(\arcsin x)^3+7}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **10.** $\int \frac{\sqrt{\ln x-3}}{x}dx$

11. $\int \frac{3x^7-7\ln x}{x}dx$ **12.** $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

13. $\int \frac{\ln x^5-\sqrt{x}}{x}dx$ **14.** $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

15. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + \sqrt{x^2+1}}{x^2+1} dx$

16. $\int \frac{\ln x^4 - 4}{x} dx$

17. $\int \frac{\ln^4 x + \sqrt{x}}{x} dx$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$

19. $\int \frac{dx}{(4-\ln x)x}$

20. $\int \frac{x^5 + \sqrt{\ln x}}{x} dx$

21. $\int \frac{\ln^2 x - 2x^3}{x} dx$

22. $\int \frac{3dx}{x(\ln x - 1)}$

23. $\int \frac{dx}{x \ln^5 x}$

24. $\int \frac{x - (\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

25. $\int \frac{x^3 - 3\ln x}{x} dx$

26. $\int \frac{5 + 2\sqrt{\ln x}}{x} dx$

27. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - 6}{1+x^2} dx$

28. $\int \frac{5 - \sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

29. $\int \frac{(\arcsin x)^5 + 3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

30. $\int \frac{\sqrt{7 - \ln x}}{x} dx$

31. $\int \frac{dx}{x(7\ln x + 3)}$

32. $\int \frac{dx}{x(2 - \ln x)}$

33. $\int \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{2 + 2x^2} dx$

34. $\int \frac{4 - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Пример выполнения задания 3

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x} - \ln^3 x}{x} dx$.

Решение.

$\int \frac{\sqrt{x}-\ln^3 x}{x}dx =$ выполним почленное деление и внесение множителя под знак дифференциала

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \frac{\ln^3 x}{x}dx = 2\sqrt{x} - \int \ln^3 x \cdot d\left(\ln x\right) = 2\sqrt{x} - \frac{\ln^4 x}{4} + C\ .$$

Задание 4

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int x \cdot \cos(3-x^2)\,dx$

2. $\int x \cdot \cos(x^2-1)\,dx$

3. $\int x \cdot \sin(3x^2+2)\,dx$

4. $\int x \cdot \sin(5x^2-1)\,dx$

5. $\int x \cdot \cos(2x^2-3)\,dx$

6. $\int x \cdot \cos(9-x^2)\,dx$

7. $\int x \cdot \sin(x^2+12)\,dx$

8. $\int x \cdot \sin(9-x^2)\,dx$

9. $\int x \cdot \cos(2x^2+7)\,dx$

10. $\int x \cdot \cos(3x^2-17)\,dx$

11. $\int x \cdot \sin(3-x^2)\,dx$

12. $\int x \cdot \cos(13-2x^2)\,dx$

13. $\int x \cdot \cos(15-8x^2)\,dx$

14. $\int x \cdot \sin(5-2x^2)\,dx$

15. $\int x \cdot \sin(2x^2-1)\,dx$

16. $\int x \cdot \cos(5-6x^2)\,dx$

17. $\int x \cdot \cos(4x^2-21)\,dx$

18. $\int x \cdot \sin(5-13x^2)\,dx$

19. $\int x \cdot \sin(13+5x^2)\,dx$

20. $\int x \cdot \cos(12-5x^2)\,dx$

21. $\int x \cdot \cos(5-12x^2)\,dx$

22. $\int x \cdot \sin(13+2x^2)\,dx$

23. $\int x \cdot \sin(3-7x^2)\,dx$

24. $\int x \cdot \cos(1-2x^2)\,dx$

25. $\int x^2 \cdot \cos(x^3 - 1)\,dx$

26. $\int x^2 \cdot \sin(x^3 - 4)\,dx$

27. $\int x \cdot \sin(7 - 2x^2)\,dx$

28. $\int x \cdot \cos(4x^2 + 17)\,dx$

29. $\int x \cdot \sin(15x^2 - 4)\,dx$

30. $\int x \cdot \sin(10x^2 - 1)\,dx$

31. $\int x \cdot \cos(1 - 3x^2)\,dx$

32. $\int x \cdot \cos(7 - 8x^2)\,dx$

33. $\int x^2 \cdot \cos(3 - x^3)\,dx$

34. $\int x^2 \cdot \sin(x^3 + 7)\,dx$.

Пример выполнения задания 4

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int x^2 \cdot \cos(x^3 - 9)\,dx$.

Решение. Пусть $t = x^3 - 9$, тогда $dt = 3x^2 dx$.

$$\int x^2 \cdot \cos\left(x^3 - 9\right)dx = \frac{1}{3} \cdot \int \cos t \cdot dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin\left(x^3 - 9\right) + C\ .$$

Решение можно выполнить внесением множителя под знак дифференциала:

$$\int x^2 \cdot \cos\left(x^3 - 9\right)dx = \frac{1}{3} \cdot \int \cos\left(x^3 - 9\right) \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int \cos\left(x^3 - 9\right) d\left(x^3 - 9\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(x^3 - 9\right) + C.$$

Задание 5

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2 \cdot e^{8x^3 + 7} dx$

2. $\int x^2 \cdot 2^{7x^3 - 3} dx$

3. $\int (6x^2+1)\cdot e^{2x^3+x}dx$

4. $\int x^2\cdot e^{7-2x^3}dx$

5. $\int x^3\cdot e^{3-x^4}dx$

6. $\int (3x^2-1)\cdot e^{x^3-x}dx$

7. $\int (3x^2+1)\cdot e^{x^3+x-1}dx$

8. $\int x^2\cdot e^{3-4x^3}dx$

9. $\int x^2\cdot 2^{2x^3+4}dx$

10. $\int (3x^2-2)\cdot e^{x^3-2x+1}dx$

11. $\int x^2\cdot e^{6-4x^3}dx$

12. $\int x^2\cdot e^{5-2x^3}dx$

13. $\int (6x^2-1)\cdot e^{2x^3-x}dx$

14. $\int (3x^2+2)\cdot e^{2x+x^3}dx$

15. $\int x^2\cdot 2^{5x^3+8}dx$

16. $\int x^2\cdot e^{2x^3+29}dx$

17. $\int (3x^2-9)\cdot e^{x^3-9x}dx$

18. $\int x^2\cdot 3^{5x^3+14}dx$

19. $\int x^2\cdot 2^{3x^3-1}dx$

20. $\int x^2\cdot e^{2x^3+17}dx$

21. $\int x^2\cdot e^{10-2x^3}dx$

22. $\int x^3\cdot 2^{3-2x^4}dx$

23. $\int (3x^2-11)\cdot e^{x^3-11x}dx$

24. $\int x^2\cdot 3^{5x^3+7}dx$

25. $\int x^2\cdot 3^{3x^3+9}dx$

26. $\int x^3\cdot 5^{2x^4-1}dx$

27. $\int x^2\cdot e^{11-5x^3}dx$

28. $\int x^3\cdot e^{7-5x^4}dx$

29. $\int x^3\cdot e^{x^4-4}dx$

30. $\int x^3\cdot e^{3x^4+1}dx$

31. $\int x^3\cdot e^{7-2x^4}dx$

32. $\int x^2\cdot 2^{5x^3-9}dx$.

33. $\int x^5\cdot e^{6-x^6}dx$

34. $\int x^4\cdot 5^{x^5-10}dx$.

Пример выполнения задания 5

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int \left(x^4-2\right)\cdot e^{x^5-10x}dx$.

Решение.

Пусть $t = x^5-10x$, тогда $dt = \left(5x^4-10\right)dx = 5\cdot\left(x^4-2\right)dx$.

$$\int \left(x^4-2\right)\cdot e^{x^5-10x}dx = \frac{1}{5}\cdot\int e^t dt = \frac{1}{5}\cdot e^t + C = \frac{1}{5}\cdot e^{x^5-10x} + C.$$

Решим внесением под знак дифференциала:

$$\int \left(x^4-2\right)\cdot e^{x^5-10x}dx = \frac{1}{5}\cdot\int e^{x^5-10x}\cdot\left(5x^4-10\right)dx = \frac{1}{5}\cdot\int e^{x^5-10x}\cdot d\left(x^5-10x\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot e^{x^5-10x} + C.$$

Задание 6

Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^4-3}}$ **2.** $\int \frac{4xdx}{\sqrt{9-x^4}}$ **3.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5+x^2}}$ **5.** $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5x^2+12}}$ **6.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^4}}$

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(3x^2-4)^2}}$ **8.** $\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{x^8+4}}$ **9.** $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{9-x^6}}$

10. $\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{25-x^8}}$ **11.** $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^4-16}}$ **12.** $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$

13. $\int \frac{8xdx}{\sqrt{4x^4+9}}$ **14.** $\int \frac{8x^3dx}{\sqrt{4x^8-1}}$ **15.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+25}}$

16. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+36}}$ **17.** $\int \frac{8x^3dx}{\sqrt{1-4x^8}}$ **18.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-25}}$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{49-x^4}}$ **20.** $\int \frac{18xdx}{\sqrt{9x^4-1}}$ **21.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^4}}$

22. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4x^6+1}}$ **23.** $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^6+16}}$ **24.** $\int \frac{12xdx}{\sqrt{4-9x^4}}$

25. $\int \frac{xdx}{\sqrt{(4-5x^2)^5}}$ **26.** $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{10-4x^2}}$ **27.** $\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{36-x^8}}$

28. $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{9+x^6}}$ **29.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{9+x^4}}$ **30.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^4}}$

31. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{25x^6+1}}$ **32.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+4}}$ **33.** $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}+1}}$

34. $\int \frac{5x^4dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$.

Пример выполнения задания 6

Применяя метод замены переменной, найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Решение. Пусть $t = x^6$, тогда $dt = 6x^5dx$.

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6}\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} = \frac{1}{6}\cdot\ln\left|t+\sqrt{t^2+7}\right| + C = \frac{1}{6}\cdot\ln\left(x^6+\sqrt{x^{12}+7}\right)+C.$$

Задание 7

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

1. $\int (4-3x)\cdot e^{-3x}dx$	**2.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\ dx$
3. $\int (3x+4)\cdot e^{3x}dx$	**4.** $\int (4x-2)\cos 2xdx$
5. $\int (4-16x)\sin 4xdx$	**6.** $\int (5x-2)\cdot e^{3x}dx$
7. $\int (1-6x)\cdot e^{2x}dx$	**8.** $\int \ln(x^2+4)\,dx$
9. $\int \ln(4x^2+1)\,dx$	**10.** $\int (2-4x)\sin 2xdx$
11. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}\,dx$	**12.** $\int (4x-3)\cdot e^{-2x}dx$
13. $\int (2-9x)\cdot e^{-3x}dx$	**14.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\ dx$
15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\ dx$	**16.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\ dx$
17. $\int (5x+6)\cos 2xdx$	**18.** $\int (3x-2)\cos 5xdx$
19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2xdx$	**20.** $\int (2x-5)\cos 4xdx$
21. $\int (4x+7)\cos 3xdx$	**22.** $\int (8-3x)\cos 5xdx$
23. $\int (x+5)\sin 3xdx$	**24.** $\int (2-3x)\sin 2xdx$
25. $\int (4x+3)\sin 5xdx$	**26.** $\int (7x-10)\sin 4xdx$
27. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3xdx$	**28.** $\int (1-5x)\cdot e^{-5x}dx$
29. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{9x-1}\ dx$	**30.** $\int (x-10)\cos 7xdx$
31. $\int \ln(9x^2+1)\,dx$	**32.** $\int \ln(x^2+9)\,dx$
33. $\int (4x+7)\cdot e^{3x}dx$	**34.** $\int (5-x)\cdot e^{-4x}dx$.

Пример выполнения задания 7

Найти неопределенный интеграл $\int (5x-2)\cdot\cos 17x\,dx$ методом интегрирования по частям.

Решение.

Пусть $u = 5x-2,\ d\upsilon = \cos 17x\,dx$,

тогда $du = 5\cdot dx$, $\upsilon = \dfrac{1}{17}\cdot\sin 17x$.

Используем формулу $\boxed{\int u d\upsilon = u\cdot\upsilon - \int \upsilon du}$:

$$\int (5x-2)\cdot\cos 17x\,dx = \frac{5x-2}{17}\sin 17x - \int\left(\frac{1}{17}\sin 17x\right)\cdot 5dx = \frac{5x-2}{17}\sin 17x -$$

$$-\frac{5}{17}\cdot\int \sin 17x\,dx = \frac{5x-2}{17}\sin 17x + \frac{5}{289}\cos 17x + C.$$

Задание 8

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

1. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$

2. $\int (x^2+4x+3)\cos x\,dx$

3. $\int (x^2-4)\cos 3x\,dx$

4. $\int (x^2+1)\,e^{3x}dx$

5. $\int (3x^2-2)\,e^{3x}dx$

6. $\int (2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx$

7. $\int (9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx$

8. $\int (8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx$

9. $\int (3x^2+5)\cos 3x\,dx$

10. $\int (2x^2-7)\,e^{4x}dx$

11. $\int (3-7x^2)\cos 2x\,dx$

12. $\int (1-8x^2)\cos 4x\,dx$

13. $\int (x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$

14. $\int (x^2-3x)\sin 2x\,dx$

15. $\int (x^2 - 3x + 2)\sin x\, dx$

16. $\int (x^2 - 5x + 6)\sin 3x\, dx$

17. $\int (1 - 6x^2)\, e^{2x} dx$

18. $\int (x+1)^2 \ln^2(x+1)\, dx$

19. $\int (x-1)^2 \ln^2(x-1)\, dx$

20. $\int (x^2 + 2x)\, e^{2x} dx$

21. $\int (2 - x^2)\, e^{4x} dx$

22. $\int (3x^2 - 4)\, e^{2x} dx$

23. $\int (x+2)^2 \ln^2(x+2)\, dx$

24. $\int (x^2 + 4x + 4)\, e^{2x} dx$

25. $\int (x^2 - 2x + 3)\, e^{2x} dx$

26. $\int (7x^2 - 5)\, e^{3x} dx$

27. $\int (x-3)^2 \ln^2(x-3)\, dx$

28. $\int (3x - x^2)\sin 3x\, dx$

29. $\int (x^2 + 7x + 12)\cos x\, dx$

30. $\int (2x^2 - 15)\cos 3x\, dx$

31. $\int (x+2)^2 \cos 3x\, dx$

32. $\int (x^2 + 4x - 9)\sin 2x\, dx$

33. $\int (2x^2 - x + 1)\, \sin 5x\, dx$

34. $\int (x^2 - 5)\, e^{5x} dx$.

Пример выполнения задания 8

Найти неопределенный интеграл $\int (x^2 - 7x)\cos 2x\, dx$ методом интегрирования по частям.

Решение.

Пусть $u = x^2 - 7x,\;\; d\upsilon = \cos 2x\, dx$,

тогда $\upsilon = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $du = (2x - 7)dx$.

Используем формулу $\boxed{\int u d\upsilon = u \cdot \upsilon - \int \upsilon du}$:

$$\int \left(x^2 - 7x\right)\cos 2x\, dx = \left(x^2 - 7x\right)\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot \int \sin 2x\left(2x - 7\right)dx .$$

Пусть $u_1 = 2x - 7,\;\; d\upsilon_1 = \sin 2x\, dx$, тогда $\upsilon_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x,\ \ du_1 = 2\,dx$. Еще раз используем формулу:

$$\int\left(x^2-7x\right)\cos 2x\,dx = \frac{x^2-7x}{2}\cdot\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\left((2x-7)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\right.$$

$$\left.-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)2\,dx\right) = \frac{x^2-7x}{2}\sin 2x + \frac{2x-7}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Задание 9

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

1. $\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx$ **2.** $\int e^{3x}\cdot\sin 2x\,dx$ **3.** $\int e^{3x}\cdot\cos 2x\,dx$

4. $\int e^{2x}\cdot\cos 4x\,dx$ **5.** $\int e^{4x}\cdot\sin 2x\,dx$ **6.** $\int e^{2x}\cdot\sin 5x\,dx$

7. $\int e^{2x}\cdot\cos 5x\,dx$ **8.** $\int e^{3x}\cdot\cos 4x\,dx$ **9.** $\int e^{3x}\cdot\sin 7x\,dx$

10. $\int e^{5x}\cdot\cos 3x\,dx$ **11.** $\int e^{5x}\cdot\sin 2x\,dx$ **12.** $\int e^{4x}\cdot\sin 5x\,dx$

13. $\int e^{4x}\cdot\cos 3x\,dx$ **14.** $\int e^{8x}\cdot\cos 2x\,dx$ **15.** $\int e^{8x}\cdot\sin 3x\,dx$

16. $\int e^{2x}\cdot\sin 7x\,dx$ **17.** $\int e^{7x}\cdot\cos 2x\,dx$ **18.** $\int e^{5x}\cdot\sin 3x\,dx$

19. $\int e^{6x}\cdot\cos 2x\,dx$ **20.** $\int e^{6x}\cdot\sin 3x\,dx$ **21.** $\int e^{5x}\cdot\cos 7x\,dx$

22. $\int e^{6x}\cdot\sin 7x\,dx$ **23.** $\int e^{7x}\cdot\cos 5x\,dx$ **24.** $\int e^{7x}\cdot\sin 4x\,dx$

25. $\int e^{5x}\cdot\sin 3x\,dx$ **26.** $\int e^{5x}\cdot\cos 4x\,dx$ **27.** $\int e^{9x}\cdot\sin 2x\,dx$

28. $\int e^{2x}\cdot\cos 9x\,dx$ **29.** $\int e^{4x}\cdot\cos 7x\,dx$ **30.** $\int e^{4x}\cdot\sin 3x\,dx$

31. $\int e^{9x}\cdot\cos 5x\,dx$ **32.** $\int e^{6x}\cdot\sin 8x\,dx$ **33.** $\int e^{10x}\cdot\sin 3xdx$

34. $\int e^{11x}\cdot\cos 4x\,dx$.

Пример выполнения задания 9

Найти неопределенный интеграл $\int e^{12x}\cdot\sin 4x\,dx$ методом интегрирования по частям.

Решение. В данном примере используется возврат к исходному интегралу.

$$\int e^{12x}\sin 4x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=e^{12x} \\ d\upsilon=\sin 4x\,dx \\ \upsilon=-\dfrac{1}{4}\cos 4x \\ du=12\cdot e^{12x}dx \end{array}\right| = -\frac{1}{4}e^{12x}\cos 4x-\int\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)12e^{12x}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}e^{12x}\cos 4x+3\cdot\int e^{12x}\cos 4x\,dx=\left|\begin{array}{l} u_1=e^{12x} \\ d\upsilon_1=\cos 4x\,dx \\ \upsilon_1=\dfrac{1}{4}\sin 4x \\ du_1=12\cdot e^{12x}dx \end{array}\right|=-\frac{1}{4}e^{12x}\cdot\cos 4x+$$

$$+3\cdot\left(\frac{1}{4}e^{12x}\cdot\sin 4x-\int\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)12e^{12x}dx\right)=-\frac{1}{4}e^{12x}\cos 4x+\frac{3}{4}e^{12x}\sin 4x-$$

$$-9\cdot\int e^{12x}\sin 4x\,dx.$$

Пусть $A=\int e^{12x}\sin 4x\,dx$, тогда

$$A=-\frac{1}{4}e^{12x}\cos 4x+\frac{3}{4}e^{12x}\sin 4x-9A\,,$$

$$10A=\frac{e^{12x}}{4}(3\sin 4x-\cos 4x)\,.$$

Ответ: $\dfrac{e^{12x}}{40}\left(3\sin 4x-\cos 4x\right)$.

Задание 10

Найти неопределенный интеграл от дробно-рациональных функций.

1. $\int \frac{x^4+2x^3-x^2-6x-2}{x(x-1)(x-2)}dx$ **2.** $\int \frac{5x^4-3x^2+3x-1}{x(x^2-1)}dx$

3. $\int \frac{x^2-17}{x^2-4x+3}dx$ **4.** $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$

5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$ **6.** $\int \frac{3x^3+9x^2+9x+5}{x^2+3x+2}dx$

7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$ **8.** $\int \frac{3x^3-4x^2-14x+5}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$

9. $\int \frac{x^3-4x^2+2x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$ **10.** $\int \frac{x^3-3x^2-17x-2}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$

11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-3)(x-4)}dx$ **12.** $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$

13. $\int \frac{3x^3-2x^2+3x-2}{x^3-x}dx$ **14.** $\int \frac{x^3+2x^2-28x+24}{x(x-2)(x-4)}dx$

15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$ **16.** $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$

17. $\int \frac{4x^5-6x^4-4x^3+x-6}{x^2-x}dx$ **18.** $\int \frac{2x^5-2x^4-12x^3-x-4}{x^2-2x}dx$

19. $\int \frac{-x^5+9x^3+12}{x^2+3x}dx$ **20.** $\int \frac{-x^5+25x^3+5}{x^2+5x}dx$

21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$ **22.** $\int \frac{2x^4-11x^2-6x-2}{x(x-2)(x+2)}dx$

23. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$ **24.** $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$

25. $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx$ **26.** $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx$

27. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx$ **28.** $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx$

29. $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x-2)(x+4)} dx$ **30.** $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 15}{x(x-3)(x+5)} dx$

31. $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x(x-1)(x+3)} dx$

32. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 8x + 20}{x(x+1)(x-2)} dx$ **33.** $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 24}{x(x+2)(x-4)} dx$

34. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x - 11}{(x+1)(x-2)(x+2)} dx$.

Пример выполнения задания 10

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3 - 20x - 21}{x(x-1)(x+3)} dx$ от дробно-рациональной функции.

Решение.

$$\int \frac{x^3 - 20x - 21}{x(x-1)(x+3)} dx =$$

дробь неправильная, поэтому выделим целую часть

$$= \int \left(1 - \frac{2x^2 + 17x + 21}{x^3 + 2x^2 - 3x} \right) dx = x - \int \frac{2x^2 + 17x + 21}{x(x-1)(x+3)} dx .$$

Остаток в виде правильной дроби разложим на простейшие с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x^2+17x+21}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}.$$

После тождественных преобразований получим:

$$\frac{2x^2+17x+21}{x(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A}{x(x-1)(x+3)}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 2A+3B-C=17 \\ -3A=21 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-7 \\ B=10 \\ C=-1 \end{cases}.$$

Итак, исходный интеграл равен

$$x-\int\left(\frac{-7}{x}+\frac{10}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=x+7\ln|x|-10\ln|x-1|+\ln|x+3|+C.$$

Задание 11

Найти неопределенный интеграл от дробно-рациональных функций.

1. $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$

2. $\int\frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx$

3. $\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$

4. $\int\frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx$

5. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx$

6. $\int\frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx$

7. $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx$

8. $\int\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$

9. $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx$

10. $\int\frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$

11. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx$

12. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx$

13. $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-1)^3}dx$

14. $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$

15. $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$

16. $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx$

17. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx$

18. $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx$

19. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}dx$

20. $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx$

21. $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$

22. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx$

23. $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}dx$

24. $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx$

25. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}dx$

26. $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx$

27. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$

28. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx$

29. $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx$

30. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$

31. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+61}{(x-2)(x+2)^3}dx$

32. $\int \frac{x^3+3x^2+4x-1}{(x-2)(x+1)^3}dx$

33. $\int \frac{x^3-3x^2+2x-4}{(x+3)(x-1)^3}dx$

34. $\int \frac{2x^3+12x^2+23x+17}{(x-1)(x+2)^3}dx$.

Пример выполнения задания 11

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3-3x^2+4x+2}{(x+3)(x-1)^3}dx$ от дробно-рациональной функции.

Решение. Подынтегральная функция – правильная дробь. Ищем ее разложение на простейшие дроби в виде

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты.

После приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{(A+B)x^3+(-3A+B+C)x^2+(3A-5B+2C+D)x+(-A+3B-3C+3D)}{(x+3)(x-1)^3}.$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+B+C=-3 \\ 3A-5B+2C+D=4 \\ -A+3B-3C+3D=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}.$$

Исходный интеграл равен:

$$\int \frac{x^3-3x^2+4x+2}{(x+3)(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x-1)^3}\right)dx=\ln|x+3|-\frac{1}{2(x-1)^2}+C.$$

Задание 12

Найти неопределенный интеграл от дробно-рациональных функций.

1. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$ **2.** $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$

20. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$

21. $\displaystyle\int \frac{4x^3+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

22. $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx$

23. $\displaystyle\int \frac{2x^3-x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

26. $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}dx$

29. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$ **30.** $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx$

31. $\int \frac{2x^3+3x^2+3+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$ **32.** $\int \frac{2x^3+2x^2+5x+2}{(x^2+x+3)(x^2+2)}dx$

33. $\int \frac{x^3+7x^2+14x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+2)}dx$ **34.** $\int \frac{2x^3+6x^2+8x+5}{(x^2+2x+2)(x^2+x+1)}dx$.

Пример выполнения задания 12

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3+7x^2+15x+11}{(x+2)^2(x^2+3x+3)}dx$ от дробно-рациональной функции.

Решение. Ищем разложение подынтегральной функции на простейшие дроби в виде: $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3x+3}$.

После тождественных преобразований получим:

$$\frac{(A+C)x^3+(5A+B+4C+D)x^2+(9A+3B+4C+4D)x+(6A+3B+4D)}{(x+2)^2(x^2+3x+3)}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 5A+B+4C+D=7 \\ 9A+3B+4C+4D=15 \\ 6A+3B+4D=11 \end{cases} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}.$$

Исходный интеграл равен:

$$\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{x+2}{x^2+3x+3}\right)dx=\int(x+2)^{-2}dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{(2x+3)+1}{x^2+3x+3}dx=$$

$$= -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+3x+3} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{x+2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C.$$

Задание 13

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

2. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

4. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$

5. $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$

7. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$

8. $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$

9. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$

10. $\int \frac{(1+\sin x)\, dx}{1+\cos x+\sin x}$

11. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$

12. $\int \frac{(1+\cos x)\, dx}{1+\cos x+\sin x}$

13. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$

14. $\int \frac{(1+\sin x)\, dx}{(1-\sin x)^2}$

15. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$

16. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$

17. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$

18. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

19. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$ **20.** $\int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos x(1+\cos x)}$

21. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$ **22.** $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

23. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$ **24.** $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

25. $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$ **26.** $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

27. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$ **28.** $\int \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

29. $\int \frac{\sin x dx}{2+\sin x}$ **30.** $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

31. $\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$ **32.** $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)(1-\cos x)}$

33. $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$ **34.** $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$.

Пример выполнения задания 13

Найти интеграл $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$ от тригонометрической функции.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку: пусть: $\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, тогда $\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}}$.

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int \frac{2dt}{4t-1+t^2+5+5t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=\int\frac{dt}{\left(\sqrt{3}\,t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,t+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Задание 14

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+1}}$

2. $\int\frac{\sin 2x dx}{1+3\cos^2 x}$

3. $\int\frac{\sin 2x dx}{(1+\cos^2 x)^3}$

4. $\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx}{(\operatorname{tg} x-1)^3}$

5. $\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$

6. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

7. $\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx}{2\operatorname{tg} x+1}$

8. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+1}}$

9. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$

10. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x-4\sin x+13}}$

11. $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x-6\cos x+5}$

12. $\int\frac{(4+\operatorname{tg} x)\,dx}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}$

13. $\int\frac{(\operatorname{ctg}^2 x+1)\,dx}{\sqrt[3]{2-\operatorname{ctg} x}}$

14. $\int\frac{(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+2}}$

15. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x+9}}$

16. $\int\frac{(\operatorname{ctg}^2 x+1)\,dx}{\sqrt{25-\operatorname{ctg}^2 x}}$

17. $\int \frac{\sin 2x dx}{2+\cos^2 x}$ **18.** $\int \frac{\sin 2x dx}{25+\sin^2 x}$

19. $\int \frac{(6+\operatorname{tg} x)\,dx}{6\sin^2 x+4\cos^2 x}$ **20.** $\int \frac{6\operatorname{tg} x dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$

21. $\int \frac{\sin x dx}{13-4\cos x+\cos^2 x}$ **22.** $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{25+\cos^2 x}}$

23. $\int \frac{(8+\operatorname{tg} x)\,dx}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$ **24.** $\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx}{(\operatorname{tg} x-1)^2}$

25. $\int \frac{(2+\cos x)\sin x dx}{8+4\cos x+\cos^2 x}$ **26.** $\int \frac{\sin 2x dx}{3\cos^2 x-5}$

27. $\int \frac{(12+\operatorname{tg} x)\,dx}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}$ **28.** $\int \frac{(4\operatorname{tg} x-5)\,dx}{4\cos^2 x-\sin 2x}$

29. $\int \frac{8\operatorname{tg} x dx}{8\sin^2 x+3\cos^2 x}$ **30.** $\int \frac{(2+\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$

31. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+18}}$ **32.** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x}$ **34.** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

Пример выполнения задания 14

Найти интеграл $\int \frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$ от тригонометрической функции.

Решение. $\int \frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx=\int \frac{(2\operatorname{tg}x+3)dx}{(\operatorname{tg}^2 x+2)\cos^2 x}$.

Пусть $t=tgx,\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$, тогда исходный интеграл равен

$$\int \frac{2t+3}{t^2+2}dt = \int \frac{2t\,dt}{t^2+2} + 3\cdot\int \frac{dt}{t^2+2} = \ln\left(t^2+2\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 2\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}} + C.$$

Задание 15

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1. $\int \sin\frac{8x}{3}\cos\frac{7x}{3}dx$

2. $\int \cos\frac{8x}{5}\cos\frac{3x}{5}dx$

3. $\int \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$

4. $\int \sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}dx$

5. $\int \cos\frac{7x}{3}\sin\frac{2x}{3}dx$

6. $\int \sin\frac{8x}{7}\sin\frac{3x}{7}dx$

7. $\int \sin\frac{4x}{3}\cos\frac{7x}{3}dx$

8. $\int \sin\frac{5x}{2}\sin\frac{7x}{2}dx$

9. $\int \cos\frac{5x}{2}\cos\frac{7x}{3}dx$

10. $\int \cos\frac{4x}{3}\sin\frac{5x}{3}dx$

11. $\int \sin\frac{2x}{3}\sin\frac{4x}{3}dx$

12. $\int \sin\frac{6x}{5}\sin\frac{2x}{5}dx$

13. $\int \cos\frac{6x}{7}\cos\frac{2x}{7}dx$

14. $\int \cos\frac{7x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$

15. $\int \sin\frac{7x}{3}\sin\frac{x}{3}dx$

16. $\int \sin\frac{3x}{5}\cos\frac{4x}{5}dx$

17. $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$

18. $\int \sin\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$

19. $\int \cos\frac{9x}{5}\cos\frac{2x}{5}dx$

20. $\int \cos\frac{9x}{5}\sin\frac{2x}{5}dx$

21. $\int \sin\frac{2x}{3}\cos\frac{5x}{3}\,dx$

22. $\int \cos\frac{9x}{2}\sin\frac{5x}{2}\,dx$

23. $\int \cos\frac{2x}{3}\cos\frac{4x}{3}\,dx$

24. $\int \sin\frac{2x}{3}\cos\frac{4x}{3}\,dx$

25. $\int \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$

26. $\int \sin\frac{7x}{2}\sin\frac{9x}{2}\,dx$

27. $\int \cos\frac{9x}{5}\sin\frac{7x}{5}\,dx$

28. $\int \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{5x}{2}\,dx$

29. $\int \cos\frac{8x}{3}\sin\frac{5x}{3}\,dx$

30. $\int \cos\frac{7x}{2}\sin\frac{3x}{2}\,dx$

31. $\int \sin\frac{8x}{3}\sin\frac{5x}{3}\,dx$

32. $\int \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

33. $\int \cos\frac{3x}{5}\cos\frac{2x}{5}\,dx$

34. $\int \sin\frac{9x}{2}\sin\frac{5x}{2}\,dx$.

Пример выполнения задания 15

Найти интеграл $\int \cos\frac{11x}{2}\cos\frac{9x}{2}\,dx$ от тригонометрической функции.

Решение. Воспользовавшись формулой

$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)}$, получим:

$$\int \cos\frac{11x}{2}\cos\frac{9x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 10x)\,dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

Задание 16

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1.	$\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$	**2.**	$\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$	**3.**	$\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$
4.	$\int \sin^4 2x dx$	**5.**	$\int \cos^4 2x dx$	**6.**	$\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$
7.	$\int 2^6 \sin^6 x dx$	**8.**	$\int 2^6 \cos^6 x dx$	**9.**	$\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^4 \frac{x}{2} dx$
10.	$\int \sin^4 \frac{x}{4} dx$	**11.**	$\int \cos^4 \frac{x}{4} dx$	**12.**	$\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$
13.	$\int \sin^4 3x dx$	**14.**	$\int \sin^6 \frac{x}{2} dx$	**15.**	$\int \cos^2 \frac{x}{4} \sin^4 \frac{x}{4} dx$
16.	$\int 2^4 \sin^4 4x dx$	**17.**	$\int \cos^6 4x dx$	**18.**	$\int \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$
19.	$\int 2^4 \cdot \cos^4 4x dx$	**20.**	$\int \sin^6 3x dx$	**21.**	$\int 2^6 \cos^4 \frac{x}{3} dx$
22.	$\int 2^4 \sin^2 \frac{x}{3} dx$	**23.**	$\int \sin^6 4x dx$	**24.**	$\int \cos^6 3x dx$

25.	$\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x dx$	**26.**	$\int 2^6 \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$
27.	$\int 2^6 \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$	**28.**	$\int 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$
29.	$\int \sin^2 4x \cdot \cos^4 4x dx$	**30.**	$\int \cos^2 4x \cdot \sin^4 4x dx$
31.	$\int 2^6 \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx$	**32.**	$\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x dx$
33.	$\int \cos^4 6x\, dx$	**34.**	$\int \sin^4 6x \cdot \cos^2 6x\, dx$.

Пример выполнения задания 16

Найти интеграл $\int \sin^4 6x\,dx$ от тригонометрической функции.

Решение.

$$\int \sin^4 6x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\cdot\int\left(1-2\cos 12x+\frac{1+\cos 24x}{2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 12x+\frac{1}{2}\cos 24x\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}\sin 12x+\frac{1}{48}\sin 24x\right)+C =$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{192}\sin 24x+C.$$

Задание 17

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$ **2.** $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt{\cos x}}$ **3.** $\int \sin^7 x dx$

4. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$ **5.** $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ **6.** $\int \cos^7 x dx$

7. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^4 x}$ **8.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$ **9.** $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$

10. $\int \cos^5 2x dx$ **11.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^7 x}}$ **12.** $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos x}$

13. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin x}$ **14.** $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$ **15.** $\int \sin^5 3x dx$

16. $\int \sqrt[3]{\sin^5 x \cdot \cos^3 x}\, dx$ **17.** $\int \sin^2 x \cdot \cos^7 x dx$

18. $\int \sqrt[3]{\cos^3 2x \cdot \sin^5 2x}\, dx$

19. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$

20. $\int \sin^4 4x \cdot \cos^3 4x dx$

21. $\int \cos^2 2x \cdot \sin^5 2x dx$

22. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin^5 x dx$

23. $\int \sin^3 3x \cdot \cos^4 3x dx$

24. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}\, dx$

25. $\int \sqrt[5]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x dx$

26. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^4 2x dx$

27. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin^3 x}\, dx$

28. $\int \sin^7 x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx$

29. $\int \cos^3 3x \cdot \sin^4 3x dx$

30. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^7 x dx$

31. $\int \sqrt[5]{\cos x} \cdot \sin^3 x dx$

32. $\int \cos^3 x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}\, dx$

33. $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

34. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

Пример выполнения задания 17

Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$ от тригонометрической функции.

Решение. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\left(-\sin^2 x\right)\left(-\sin x\, dx\right)}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

Пусть $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\, dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\left(t^2 - 1\right)dt}{\sqrt[3]{t}} = \int \left(t^{\frac{4}{3}} - t^{-\frac{2}{3}} \right) dt = \frac{3t^{\frac{7}{3}}}{7} - 3t^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{7} \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} - 3 \cdot \sqrt[3]{\cos x} + C.$$

Задание 18

Найти интеграл от тригонометрических функций.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \cdot \sin x}}$ 2. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cdot \cos x}$ 3. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}$

4. $\int \frac{dx}{\sin^6 2x}$ 5. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}} dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\cos^5 x \cdot \sin^3 x}}$

7. $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$ 8. $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^5 x}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos^5 x \cdot \sin x}}$ 11. $\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx$ 12. $\int \sqrt{\frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}} dx$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \cdot \sin x}}$ 14. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^8 x}$ 15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^7 x}$

16. $\int \frac{dx}{\cos^4 (x/2)}$ 17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$ 18. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}} dx$

19. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^3 x}$ 20. $\int \sqrt{\frac{\cos^5 x}{\sin^9 x}} dx$ 21. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{13} x}$

22. $\int \frac{dx}{\sin^6 4x}$ 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^7 x}}$ 24. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^8 x}$

25. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$ 26. $\int \sqrt{\frac{\sin^5 x}{\cos^9 x}} dx$ 27. $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx$

28. $\int \frac{\cos^7 x \cdot dx}{\sin^{13} x}$ 29. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x}$ 30. $\int \frac{dx}{\sin^4 (x/2)}$

31. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ 32. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x \cdot \sin^5 x}}$ 33. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^3 x}}$

34. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} dx$.

Пример выполнения задания 18

Найти интеграл $\int \sqrt{\dfrac{\cos x}{\sin^5 x}}\, dx$ от тригонометрической функции.

Решение. $\int \sqrt{\dfrac{\cos x}{\sin^5 x}}\, dx = \int \sqrt{\dfrac{\cos x}{\sin x}} \cdot \dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

Пусть $t = \operatorname{ctg} x$, тогда $dt = -\dfrac{1}{\sin^2 t} dx$

$$\int \sqrt{\frac{\cos x}{\sin^5 x}}\, dx = -\int \sqrt{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{dx}{\sin^2 x}\right) = -\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{2}{3} t\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{3} \operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} x} + C.$$

Задание 19

Найти интегралы от иррациональных функций.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1} - 2\sqrt[4]{(2x+1)^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt[6]{x} - 3)\, dx}{\sqrt[6]{x^5}\,(4 + \sqrt[3]{x})}$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+6}\, dx}{\sqrt{x+6} + 2\sqrt[4]{x+6}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3x+2)^3} + \sqrt{3x+2}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(9 + \sqrt[6]{x})}$

6. $\displaystyle\int \frac{(2 + 3\sqrt[8]{x})\, dx}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[8]{x^7}}$

7. $\displaystyle\int \frac{(3 - 2\sqrt[7]{x})\, dx}{\sqrt[7]{x^6} - \sqrt[14]{x^{13}}}$

8. $\displaystyle\int \frac{(5 + \sqrt[6]{x})\, dx}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})^2}$

9. $\displaystyle\int \frac{(1 + \sqrt[6]{x})\, dx}{(\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[4]{x^3})}$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[6]{x})^2}$

11. $\int \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1})\,dx}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}$ **12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ **14.** $\int \frac{2dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}+10)}$

15. $\int \frac{(\sqrt[8]{x}-1)\,dx}{\sqrt[8]{x^7}\,(5-\sqrt[4]{x})}$ **16.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+5)}$ **18.** $\int \frac{(\sqrt[6]{x}-2)\,dx}{\sqrt[6]{x^5}\,(4\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}-3)}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^3}$ **20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}-2\sqrt[4]{1+2x}+2}$

21. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$ **22.** $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})\,dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})}$

23. $\int \frac{(6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})\,dx}{\sqrt[3]{x}-6\sqrt[4]{x^3}-7x}$ **24.** $\int \frac{(2+\sqrt[3]{x})\,dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **26.** $\int \frac{\sqrt[6]{x+2}\;dx}{6(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2})}$

27. $\int \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})\,dx}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}$ **28.** $\int \frac{6\sqrt{x+2}\,dx}{\sqrt{x+1}\cdot(x+2)^2}$

29. $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})\,dx}{x+\sqrt[3]{x^4}}$ **30.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x+\sqrt[4]{x^3}}$

31. $\int \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})\,dx}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{x-2})(x+2)^2}$ **32.** $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-1)\,dx}{(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x})^3}$

33. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$ **34.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Пример выполнения задания 19

Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$ от иррациональной функции.

Решение. Пусть $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5\,dt$,

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5\,dt}{t^6 - t^4} = 6\cdot\int \frac{t^4 dt}{t^2-1} = 6\cdot\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C = 2\sqrt{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

Задание 20

Найти интегралы от иррациональных функций.

1. $\int \frac{(5x+8)\,dx}{\sqrt{5+4x+x^2}}$ **2.** $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{3x-x^2+2}}$ **3.** $\int \frac{(7x-1)\,dx}{\sqrt{8x-x^2+12}}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2-6x}}$ **5.** $\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{3-6x-3x^2}}$ **6.** $\int \frac{(3x+5)\,dx}{\sqrt{2x^2-8x+7}}$

7. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ **8.** $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ **9.** $\int \frac{(6x-1)\,dx}{\sqrt{1-6x-3x^2}}$

10. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ **11.** $\int \frac{(3x+7)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$ **12.** $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

13. $\int \frac{(3x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-6x-16}}$ **14.** $\int \frac{7xdx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ **15.** $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$

16. $\int \frac{(5x-2)\,dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$ **17.** $\int \frac{(7x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ **18.** $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+6x+16}}$

19. $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ **20.** $\int \frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ **21.** $\int \frac{(8x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

22. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$ **23.** $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$ **24.** $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x+17}}$

25. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **26.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ **27.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$

28. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$ **29.** $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ **30.** $\int \frac{(5x+3)\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

31. $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ **32.** $\int \frac{(3x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+8x+2}}$ **33.** $\int \frac{(4x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$

34. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{\sqrt{4-2x+x^2}}$.

Пример выполнения задания 20

Найти интеграл $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ от иррациональной функции.

Решение.

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{\frac{3}{2}\left(2x+4\right)-8}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}} -$$

$$-8\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+2\right)^2+1}} = 3\sqrt{x^2+4x+5} - 8\ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

Задание 21

Найти интегралы от иррациональных функций.

1. $\int \sqrt{256 - x^2}\, dx$

2. $\int x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(7 - x^2)^3}}$

4. $\int \frac{dx}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}$

6. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}\, dx}{x^4}$

7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

9. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(2 - x^2)^3}}$

10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

11. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$

13. $\int x^2 \sqrt{8 - x^2}\, dx$

14. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$

15. $\int x^2 \sqrt{25 - x^2}\, dx$

16. $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 2}\, dx}{x^4}$

19. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$

20. $\int x^2 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$

23. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$

24. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}\, dx}{x^4}$

25. $\int \sqrt{49 - x^2}\, dx$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}\, dx}{x^4}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$

28. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

30. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ **32.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **33.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

34. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Пример выполнения задания 21

Найти интеграл $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ от иррациональной функции.

Решение. Область определения подынтегральной функции есть $[-3;\,3]$, поэтому можно положить $x=3\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$dx = 3\cos t\,dt$, $t=\arcsin\frac{x}{3}$,

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 x}=3\cdot\left|\cos t\right|=3\cos t\ .$$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt=9\cdot\int \cos^2 t\,dt=\frac{9}{2}\cdot\int\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\cdot\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C.$$

Замечание.

Ответ можно преобразовать к виду $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{9-x^2}+C$.

Кстати, в таком же виде ответ получается и при другом способе решения – интегрировании по частям.

3.2. Определенный интеграл

Задание 1

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$	**2.** $\int_0^{16} \frac{xdx}{\sqrt{(x+9)^3}}$	**3.** $\int_1^5 x\sqrt{1+3x}\,dx$
4. $\int_1^e \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$	**5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{4+3\cos x}$	**6.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
7. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$	**8.** $\int_0^3 \frac{x^3dx}{x^4+1}$	**9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$
10. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$	**11.** $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	**12.** $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$
13. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x+1)^4}$	**14.** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	**15.** $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$
16. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$	**17.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos xdx$	**18.** $\int_1^e \frac{x^2-3\ln x}{x}dx$
19. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$	**20.** $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$	**21.** $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
22. $\int_1^4 \frac{(1+2\sqrt{x})\,dx}{\sqrt{x^3}(1+\sqrt{x})^2}$	**23.** $\int_0^1 \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^2}$	**24.** $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
25. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	**26.** $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$	**27** $\int_e^{e^2} \frac{3-\ln x^2}{x}dx$

28. $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{x^4+9}$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \cos x}{(2\cos x + 3\sin x)^2}dx$

30. $\int\limits_0^1 \frac{x - 4\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$

31. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{3x + (\mathrm{arctg}\,x)^4}{1+x^2}dx$

32. $\int\limits_0^{0,5} \frac{8x + 3\,\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$

33. $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

34. $\int\limits_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$.

Пример выполнения задания 1

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$.

Решение. Пусть $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$, тогда исходный интеграл равен

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2 - 5t + 6} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot\left(\ln\left|\frac{\left(t-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(t-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

Задание 2

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

2. $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$

3. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$

4. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$ **5.** $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$ **6.** $\int\limits_0^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$

7. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-2x^2}\,dx$ **8.** $\int\limits_0^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ **9.** $\int\limits_0^{5} x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$

10. $\int\limits_0^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$ **11.** $\int\limits_0^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$ **12.** $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

13. $\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^4}$ **14.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$ **15.** $\int\limits_0^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$

16. $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$ **17.** $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$ **18.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

19. $\int\limits_0^{2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$ **20.** $\int\limits_0^{3} \sqrt{36-x^2}\,dx$ **21.** $\int\limits_0^{2,5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$

22. $\int\limits_0^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$ **23.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx$ **24.** $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}$ **26.** $\int\limits_3^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$ **27.** $\int\limits_2^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$

28. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$ **29.** $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$ **30.** $\int\limits_0^{1,5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

31. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$ **32.** $\int\limits_0^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **33.** $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

34. $\int\limits_0^6 x^2\sqrt{36-x^2}\,dx$.

Пример выполнения задания 2

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Пусть $x = 2\sin t,\ t \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$ и исходный интеграл равен

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = 2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right) = \pi.$$

Задание 3

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-3}^{-2}(2x+5)\sin\dfrac{2\pi x}{3}\,dx$

2. $\int\limits_{-4}^{-2}(x-5)\sin\dfrac{3\pi x}{8}\,dx$

3. $\int\limits_{-2}^{0}(3x+2)\sin\dfrac{\pi x}{8}\,dx$

4. $\int\limits_{-1}^{0}(8x+1)\sin\dfrac{3\pi x}{4}\,dx$

5. $\int\limits_{1}^{3}(15x-2)\sin\frac{\pi x}{6}\,dx$

6. $\int\limits_{1}^{2}(6x-5)\sin\frac{\pi x}{6}\,dx$

7. $\int\limits_{1}^{3}(7x+4)\sin\frac{2\pi x}{3}\,dx$

8. $\int\limits_{2}^{3}(3x+2)\sin\frac{\pi x}{6}\,dx$

9. $\int\limits_{0}^{1,5}(2x-3)\sin\pi x\,dx$

10. $\int\limits_{-2}^{0}(2x-1)\sin\frac{\pi x}{8}\,dx$

11. $\int\limits_{-3}^{-2}(11x+9)\cos\frac{\pi x}{3}\,dx$

12. $\int\limits_{-3}^{0}(7x+12x)\sin\frac{2\pi x}{3}\,dx$

13. $\int\limits_{-2}^{2}(x-3)\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$

14. $\int\limits_{-1}^{0}(3x+4)\sin\pi x\,dx$

15. $\int\limits_{-2}^{0}(6x-5)\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$

16. $\int\limits_{0}^{0,25}(1+4x)\cos 3\pi x\,dx$

17. $\int\limits_{-1}^{0,5}(2-4x)\cos\frac{3\pi x}{2}\,dx$

18. $\int\limits_{2}^{3}(2x-1)\cos\frac{2\pi x}{3}\,dx$

19. $\int\limits_{2}^{4}(x-5)\cos\frac{3\pi x}{8}\,dx$

20. $\int\limits_{2}^{4}(x-3)\cos\frac{\pi x}{8}\,dx$

21. $\int\limits_{2}^{3}(1-8x)\cos\frac{3\pi x}{4}\,dx$

22. $\int\limits_{1}^{3}(2x-15)\cos\frac{\pi x}{6}\,dx$

23. $\int\limits_{1}^{2}(5x-6)\cos\frac{\pi x}{6}\,dx$

24. $\int\limits_{1}^{3}(4x+7)\cos\frac{2\pi x}{3}\,dx$

25. $\int\limits_{2}^{3}(2x+3)\cos\frac{\pi x}{6}\,dx$

26. $\int\limits_{0}^{1,5}(3x+2)\cos\pi x\,dx$

27. $\int\limits_{0}^{2}(2x+1)\cos\frac{\pi x}{8}\,dx$

28. $\int\limits_{0}^{3}(9x+11)\cos\frac{\pi x}{3}\,dx$

29. $\int\limits_{-3}^{3}(7x+12)\cos\frac{2\pi x}{3}\,dx$

30. $\int\limits_{-2}^{2}(3x+1)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$

31. $\int\limits_{-1}^{0}(4x+3)\cos\pi x\,dx$ **32.** $\int\limits_{-2}^{0}(5x+6)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$

33. $\int\limits_{0}^{3}(4x-1)\cos\frac{\pi x}{3}\,dx$ **34.** $\int\limits_{4}^{6}(1-x)\sin\frac{\pi x}{4}\,dx$.

Пример выполнения задания 3

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{2}(x+3)\sin\frac{\pi x}{4}\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, положив $u = x+3$, $d\upsilon = \sin\frac{\pi x}{4}dx$, $du = dx$, $\upsilon = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{4}$.

$$\int\limits_{0}^{2}(x+3)\sin\frac{\pi x}{4}\,dx = \left((x+3)\cdot\left(-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{4}\right)\right)\Bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{2}\cos\frac{\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{12}{\pi} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{12}{\pi} + \frac{16}{\pi^2} = \frac{12\pi+16}{\pi^2}.$$

3.3. Приложения определенного интеграла

Задание 1

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

1. $y=(x-2)^3$, $y=(x-2)^2$.

2. $y=(x-2)^3$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=0$.

3. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2$.

4. $y = \sin x \cdot \cos^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

6. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 2$.

7. $y = \cos x \cdot \sin^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

8. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

9. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.

10. $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.

11. $y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$.

12. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

13. $y = x\sqrt{36 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 6$.

14. $y^2 = x + 3$, $x + 2y = 5$.

15. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

16. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 2\sqrt{2}$.

17. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $y = \ln 2$, $x = 0$.

18. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 2$.

19. $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

20. $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$.

21. $x = (y-2)^3$, $x = 4y - 8$.

22. $y = \cos^5 x \cdot \sin 2x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

23. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad y = 0, \quad x = 1$.

24. $x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y$.

25. $x = \dfrac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = e^3$.

26. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 1$.

27. $y = x^2\sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 4$.

28. $x = \sqrt{4 - y^2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$.

29. $y = (x - 1)^2, \quad y^2 = x - 1$.

30. $y = x^2 \cos x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

31. $x = 4 - (y - 1)^2, \quad x = y^2 - 4y + 3$.

32. $x = (y + 1)^2, \quad x^2 = y + 1$.

33. $y = x^2 - 9, \quad y = -x^2 + 4x - 3$.

34. $y = x^2, \quad y = (x - 2)^2, \quad y = 0$.

Пример выполнения задания 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{\ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = e.$$

Решение. Так как на отрезке $[1;\ e]$ функция $y = \dfrac{\ln x}{x}$ непрерывна и неотрицательна, то фигура, ограниченная данными линиями, есть криволинейная трапеция, поэтому ее площадь равна $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx$.

Пусть $t = \ln x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$.

При $x = 1$ $t = 0$, при $x = e$ $t = 1$.

$$\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int\limits_0^1 t\, dt = \left.\left(\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Задание 2

Вычислить площади фигур, ограниченных данными линиями.

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2,\ (x \ge 2)$.

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \left(y \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4,\ (0 \le x \le 8\pi,\ y \ge 4)$.

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 16\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2,\ (x \ge 2)$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $y = \dfrac{1}{4},\ \left(y \ge \dfrac{1}{4}\right)$.

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3,\ (0 < x < 4\pi,\ y \ge 3)$.

7. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \left(x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right).$

8. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \left(x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right).$

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3, \ (0 < x < 6\pi, \ \ y \geq 3).$

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 8\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $y = 4, \ (y \geq 4).$

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3, \ (y \geq 3).$

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9, \ (0 < x < 12\pi, \ \ y \geq 9).$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = \dfrac{1}{2}, \ \left(x \geq \dfrac{1}{2} \right).$

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4, \ (y \geq 4).$

15. $\begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9, \ (0 \leq x \leq 18\pi, \ \ y \geq 9).$

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}, \ (x \geq 3\sqrt{3}).$

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}, \ (y \geq 2\sqrt{3}).$

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15, \ (0 \leq x \leq 20\pi, \ \ y \geq 15).$

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1,\ (x \ge 1)$.

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4,\ (y \ge 4)$.

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1,\ (0 \le x \le 2\pi,\ \ y \ge 1)$.

22. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1,\ (x \ge 1)$.

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2,\ (y \ge 2)$.

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 12,\ (0 \le x \le 16\pi,\ \ y \ge 12)$.

25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 24\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3},\ \left(x \ge 9\sqrt{3}\right)$.

26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3},\ \left(y \ge 4\sqrt{3}\right)$.

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2,\ (0 \le x \le 4\pi,\ \ y \ge 2)$.

28. $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = \dfrac{3}{2},\ \left(x \ge \dfrac{3}{2}\right)$.

29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5,\ (y \ge 5)$.

30. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 5,\ (0 \le x \le 10\pi,\ \ y \ge 5)$.

31. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{3}{8}, \ \left(x \geq \dfrac{3}{8} \right).$

32. $\begin{cases} x = 5\sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $\quad y = 2, \ (y \geq 2).$

33. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $\quad y = 3, \ (y \geq 3).$

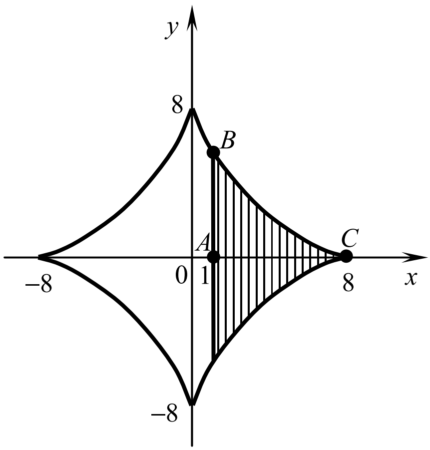
34. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\,(t - \sin t), \\ y = \sqrt{2}\,(1 - \cos t), \end{cases}$ $\quad y = 0, \ t \in [0;\ 2\pi].$

Пример выполнения задания 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \qquad x = 1, \ (x \geq 1).$$

Решение. Данная фигура есть часть астроиды, лежащая правее прямой $x = 1$ (см. рис.).



В силу симметрии данной фигуры относительно оси Ox, ее площадь равна удвоенной площади криволинейной трапеции ABC. Точке C соответствует значение $t=0$. Решая уравнение $8\cos^3 t=1$, получим, что точке B соответствует значение $t=\frac{\pi}{3}$. Воспользуемся формулой $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt$, тогда площадь искомой фигуры равна

$$2\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(8\sin^3 t\right)\left(8\cos^3 t\right)'\,dt=2\cdot 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sin^3 t\cdot 24\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt=$$

$$=-16\cdot 24\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt=16\cdot 24\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2 t\cdot\cos^2 t}{4}\cdot\sin^2 t\,dt=$$

$$=16\cdot 6\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2t\,\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=16\cdot 6\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 4t}{2}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=24\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 4t\cdot\cos 2t\right)dt=$$

$$=24\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=$$

$$=24\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=$$

$$=24\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=24\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=8\pi.$$

Задание 3

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1. $r = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad r = \sin\varphi, \quad \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

2. $r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \ge 2)$

3. $r = \cos\varphi, \quad r = 2\sqrt{3}\sin\varphi, \quad \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

4. $r = \cos\varphi, \quad r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) \quad \left(-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

5. $r = \sin\varphi, \quad r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) \quad \left(0 \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}\right)$

6. $r = \cos\varphi, \quad r = \sin\varphi, \quad \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

7. $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) \quad \left(\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}\right)$

8. $r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \ge 3)$

9. $r = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi$

10. $r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \ge 2)$

11. $r = \cos 2\varphi$

12. $r = \sin 3\varphi$

13. $r = 6\sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \ge 3)$

14. $r = \cos 3\varphi$

15. $r = \cos\varphi, \quad r = 2\cos\varphi$

16. $r = \sin\varphi, \quad r = 2\sin\varphi$

17. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$

18. $r = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi$

19. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$

20. $r = \dfrac{5}{2} + \sin\varphi, \quad r = \dfrac{3}{2}\sin\varphi$

21. $r = \dfrac{3}{2}\cos\varphi, \quad r = \dfrac{5}{2}\cos\varphi$

22. $r = 4\cos 4\varphi$

23. $r = \sin 6\varphi$

24. $r = \cos\varphi, \quad r = 3\cos\varphi$

25. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$

26. $r = 2\sin 4\varphi$

27. $r = 2\cos(6\varphi)$

28. $r = \cos\varphi - \sin\varphi$

29. $r = 6\sin\varphi, \ r = 4\sin\varphi$

30. $r = 2\sin\varphi, \quad r = 4\sin\varphi$

31. $r = 3\sin\varphi, \ r = 5\sin\varphi$

32. $r = 2\cos\varphi, \ r = 4\cos\varphi$

33. $r = \sqrt{2}\,(1 + \cos\varphi)$

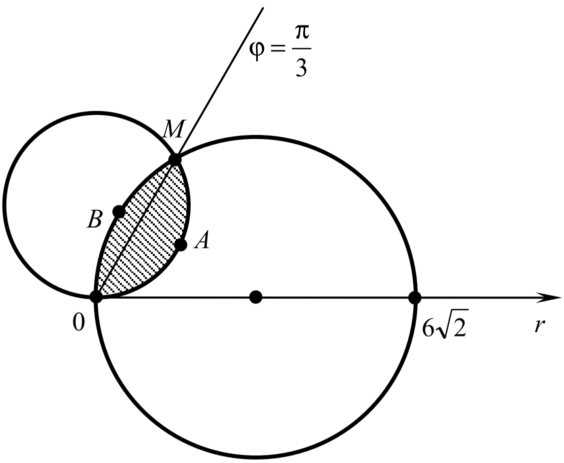
34. $r = 6\cos\varphi, \quad r = 3\cos\varphi$.

Пример выполнения задания 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 6\sqrt{2}\cos\varphi, \quad r = 2\sqrt{6}\sin\varphi$.

Решение. Имеем две окружности. Решив систему $\begin{cases} r = 6\sqrt{2}\cos\varphi \\ r = 2\sqrt{6}\sin\varphi \end{cases}$,

найдем точки пересечения данных окружностей: O и $M\left(3\sqrt{2}\,;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ (см. рис.).



Искомая площадь равна сумме площадей криволинейных секторов OBM и OAM. Дуга MBO описывается концом полярного радиуса r большей окружности при изменении полярного угла φ от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$, а дуга OAM описывается концом полярного радиуса r меньшей окружности при изменении полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sqrt{6}\sin\varphi\right)^2 d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(6\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2 d\varphi=\ldots=5\pi-6\sqrt{3}\,.$$

Задание 4

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\quad 0\le x\le\frac{7}{9}$

2. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}\,,\quad \frac{1}{4}\le x\le 1$

3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\quad 0\le x\le\frac{8}{9}$

4. $y=e^x+13,\quad \ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$

5. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}\,,\quad 0\le x\le\frac{1}{4}$

6. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5\,,\quad \frac{1}{9}\le x\le 1$

7. $y=e^x+6\,,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$

8. $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$

9. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \dfrac{15}{16}$

10. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1$, $0 \le x \le \dfrac{9}{16}$

11. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \dfrac{3}{4}$

12. $y = e^x + 26$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$

13. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

14. $y = e^x + e$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}$

15. $y = 5 - e^x$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$

16. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$

17. $y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

18. $y = 2 + \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 1$

19. $y = 1 - \ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

20. $y = \ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

21. $y = \operatorname{ch} x + 3$, $0 \le x \le 1$

22. $y = \ln\cos x + 2$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

23. $y = e^x + \dfrac{e^{-2x}}{2} + 3$, $0 \le x \le 2$

24. $y = \dfrac{e^x + e^{-2x} + 3}{4}$, $0 \le x \le 2$

25. $y = \dfrac{1 - e^x - e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 3$

26. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $1 \le x \le 2$

27. $y = \ln\dfrac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

28. $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$, $2 \le x \le 3$

29. $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{4}$

30. $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

31. $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right)$, $3 \le x \le 4$

32. $y = \ln 7 - \ln x, \quad 3 \le x \le 8$ **33.** $y = 1 + \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

34. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x} + 3, \quad \dfrac{1}{16} \le x \le 1$.

Пример выполнения задания 4

Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 4 + \ln x, \quad x \in \left[2\sqrt{2}\,;\ 2\sqrt{6}\right]$.

Решение. Воспользовавшись формулой $\boxed{L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}$, получим, что длина дуги данной кривой равна $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}} \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx$. Сделав замену $t = \sqrt{x^2 + 1}$, приведем интеграл к виду $\int\limits_3^5 \dfrac{t^2}{t^2 - 1}\, dt$, который легко вычисляется.

Ответ: $2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

Задание 5

Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

2. $x = 4(\cos t + t\sin t)$, $y = 4(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

3. $x = 10\cos^3 t$, $y = 10\sin^3 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

4. $x = 3(t + \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $\pi \le t \le 2\pi$.

5. $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\cos t - t\sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

6. $x = 6\cos^3 t$, $y = 6\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

7. $x = 2{,}5(t + \sin t)$, $y = 2{,}5(1 - \cos t)$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

8. $x = 6(\cos t + t\sin t)$, $y = 6(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

9 $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.

10. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

11. $x = 8(\cos t + t\sin t)$, $y = 8(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

12. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

13. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $\pi \le t \le \frac{\pi}{2}$.

14. $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

15. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

16. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

17. $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\sin t - \sin 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

18. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

19. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

20. $x = \frac{1}{2}\left(\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

21. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.

22. $x=e^t\left(\cos t+\sin t\right)$, $y=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$, $\dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

23. $x=3{,}5\left(2\cos t-\cos 2t\right)$, $y=3{,}5\left(2\sin t-\sin 2t\right)$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

24. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

25. $x=e^t\left(\cos t+\sin t\right)$, $y=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$, $0\le t\le 2\pi$.

26. $x=2\left(2\cos t-\cos 2t\right)$, $y=2\left(2\sin t-\sin 2t\right)$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.

27. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

28. $x=e^t\left(\cos t+\sin t\right)$, $y=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$, $0\le t\le\dfrac{3\pi}{2}$.

29. $x=4\left(2\cos t-\cos 2t\right)$, $y=4\left(2\sin t-\sin 2t\right)$, $0\le t\le\pi$.

30. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

31. $x=e^t\left(\cos t+\sin t\right)$, $y=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$, $\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

32. $x=\sqrt{2}\left(t-\sin t\right)$, $y=\sqrt{2}\left(1-\cos t\right)$, $\dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

33. $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

34. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\le t\le 1$.

Пример выполнения задания 5

Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. По формуле $\boxed{L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt}$ имеем

$$L=l\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(8\cos t-6\sin t)^2+(6\cos t+8\sin t)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100\cos^2 t+100\sin^2 t}\,dt=10\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt=5\pi.$$

Задание 6

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

1. $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

2. $r=3e^{\frac{4\varphi}{3}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

3. $r=\sqrt{2}e^{\varphi},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4. $r=5e^{\frac{5\varphi}{12}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

5. $r=6e^{\frac{12\varphi}{5}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6. $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

7. $r=4e^{\frac{4\varphi}{3}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

8. $r=\sqrt{2}e^{\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

9. $r=5e^{\frac{5\varphi}{12}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

10. $r=12e^{\frac{12\varphi}{5}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

11. $r=2(1-\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$

12. $r=2(1-\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$

13. $r=1+\sin\varphi,\quad -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0$

14. $r=4(1-\sin\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$

15. $r=5(1-\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

16. $r=6(1+\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$

17. $r = 7(1 - \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$

18. $r = 8(1 - \cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3}$

19. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$

20. $r = 3(1 - \cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

21. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{5}{12}$

22. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$

23. $r = 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$

24. $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}$

25. $r = 5\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}$

26. $r = 3\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$

27. $r = 8\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

28. $r = 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$

29. $r = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$

30. $r = 6\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$

31. $r = 6\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$

32. $r = 8\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

33. $r = 2(1 + \cos\varphi), \quad \pi \le \varphi \le 2\pi$

34. $r = 3\cos\varphi, \quad \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

Пример выполнения задания 6

Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = \sin^3\dfrac{\varphi}{3}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Длину дуги вычисляем по формуле $\boxed{L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi}$.

В нашем случае имеем:

$$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \left(3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2}\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

Задание 7

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных данными линиями. В вариантах 1-17 ось вращения Ox, в вариантах 18-34 ось вращения Oy.

1. $2x - x^2 - y = 0$, $\quad 2x^2 - 4x + y = 0$

2. $y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

3. $y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad x = -\dfrac{\pi}{2}, \ x = \dfrac{\pi}{2}$

4. $y = \sin^2 x, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad y = 0, \quad x = 0$

5. $x = \sqrt[3]{y} - 2, \quad x = 1, \quad y = 1$

6. $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0$

7. $y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

8. $y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y - 2}, \quad x = 1$

9. $y = \arccos\dfrac{x}{3}, \quad y = \arccos x, \quad y = 0$

10. $y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x = 0, \quad x = 1$

11. $y = \sqrt{1 - x}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0{,}5$

12. $y^2 = x - 2, \quad y = 0, \quad y = x^3, \quad y = 1$

13. $y = \arccos\dfrac{x}{5}, \quad y = \arccos\dfrac{x}{3}, \quad y = 0$

14. $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0$

15. $y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0$

16. $y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad x = 0$

17. $y = (x - 1)^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$

18. $y = \arcsin\frac{x}{5}, \quad y = \arcsin\frac{x}{3}, \quad y = \frac{\pi}{2}$

19. $y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0$

20. $y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1$

21. $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2$

22. $y = x^2, \quad y^2 - x = 0$

23. $x^2 + (y-2)^2 = 1$

24. $y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2$

25. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$

26. $y = \sin\frac{\pi x}{2}, \quad y = x^2$

27. $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0$

28. $y = \sin x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

29. $y = (x-1)^2, \quad y = 1$

30. $y = x^3, \quad y = x^2$

31. $y = x^3 + 2, \quad y = x^2 + 2$

32. $y = x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}$

33. $x = \frac{1}{2}y^2, \ \ 2x + 2y - 3 = 0$

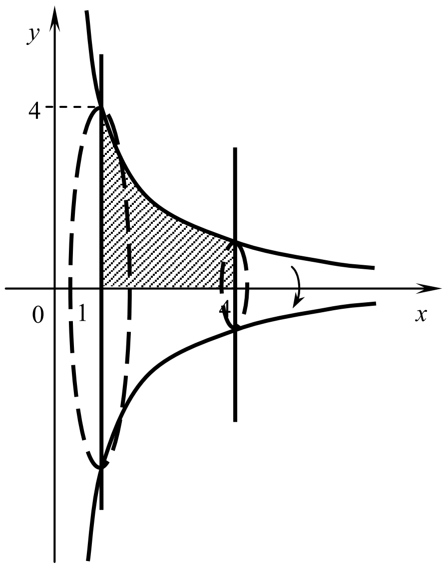
34. $y = \frac{(x+2)^2}{2}, \quad y = 2$.

Пример выполнения задания 7

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями

$$y = \frac{4}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4 .$$

Ось вращения Ox .



Решение.
Воспользуемся формулой

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b y^2 dx}.$$

$$V_x = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \ldots = 12\pi.$$

3.4. Несобственные интегралы

Задание 1

Установить сходимость или расходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами, исходя из определения несобственных интегралов первого рода.

1. $\int\limits_{-\infty}^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$ **2.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$ **3.** $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-2x^2} dx$

4. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$ **5.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **6.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+1}$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ **8.** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ **9.** $\int\limits_{-\infty}^{1} e^{3x-1}dx$

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+9x^2}$ **11.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+7}$ **12.** $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}$

13. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x+1}{x}dx$ **14.** $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^{-x^2} dx$ **15.** $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

16. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$ **17.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{5x^3+1}$ **18.** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x+1}}$

19. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+9x+13}$ **20.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ **21.** $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **23.** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3dx}{3x^4-1}$ **24.** $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+1)^3}$

25. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}dx$ **26.** $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+4}$ **27.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^x+1}$

28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}$ **29.** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+7}$ **30.** $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^2 x}}$

31. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6+1}$ **32.** $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$ **33.** $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

34. $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot \sin x \, dx$.

Пример выполнения задания 1

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла с бесконечными пределами $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$, исходя из определения несобственных интегралов первого рода.

Решение.

$$\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{e^2}^{a} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{a \to +\infty} \left(\left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Bigg|_{e^2}^{a} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln^2 a} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}.$$

Задание 2

Установить сходимость или расходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами, используя признаки сходимости.

1. $\int\limits_e^{\infty} \frac{\ln x + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$ **2.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin 2x \, dx}{x \sqrt[3]{x}}$ **3.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2} dx$

4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{x^3+1}$ **5.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **6.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{(3x+1)(2\sqrt{x}-1)}$

7. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ **8.** $\int\limits_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x}-1}$ **9.** $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$

10. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}-1}$ **11.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{x\,dx}{(1+x)^3}$ **12.** $\int\limits_3^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x(x-1)(x-2)}$

13. $\int\limits_1^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ **14.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{(5x-4)dx}{x(x+1)(x+2)}$ **15.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{2x}\,dx}{(1+2x)^2}$

16. $\int\limits_1^{\infty}\frac{(x+1)dx}{(x+2)(x^2+1)}$ **17.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{x^3dx}{3x^4-1}$ **18.** $\int\limits_2^{\infty}\frac{\sin^2 x\,dx}{x(x+2)}$

19. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ **20.** $\int\limits_e^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^3+x}$ **21.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+1}dx$

22. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$ **23.** $\int\limits_2^{\infty}\frac{3x-1}{x(x^2+1)}dx$ **24.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

25. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x(2+\cos x)}{2x^2-1}dx$ **26.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x^7}}$ **27.** $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$

28. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}dx$ **29.** $\int\limits_{-\infty}^{-3}\frac{2-\sin\frac{x}{2}}{x^3}dx$ **30.** $\int\limits_2^{\infty}\frac{\sin(x^2+1)}{x}dx$

31. $\int\limits_2^{\infty}\frac{x\ln x}{x^3-3}dx$ **32.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}dx$ **33.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2+x+3x^5}$

34. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

Пример выполнения задания 2

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла с бесконечными пределами $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, используя признаки сходимости.

Решение. На промежутке $[1;+\infty)$ функция $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}$ принимает только положительные значения и $\dfrac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}>\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$.

Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится.

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ так же расходится.

Задание 3

Установить сходимость или расходимость несобственных интегралов от неограниченных функций, исходя из определения несобственных интегралов второго рода.

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ **2.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}2x\,dx$ **3.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

4. $\int\limits_3^6\dfrac{dx}{x^2-7x+10}$ **5.** $\int\limits_{-2}^0\dfrac{dx}{x^2-2x-3}$ **6.** $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$

7. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1-x^3}$ **8.** $\int\limits_{0,5}^1\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **9.** $\int\limits_2^3\dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

10. $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ **11.** $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$ **12.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0\dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x+1}}$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)(\operatorname{arctg}x)^2}$ **14.** $\int\limits_{-1}^0\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ **15.** $\int\limits_0^1\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}}dx$

16. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^4-1}$ **17.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$ **18.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$

19. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-x-6}$ **20.** $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}}$ **21.** $\int\limits_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

22. $\int\limits_2^3 \frac{(2x-7)dx}{x^2-7x+10}$ **23.** $\int\limits_3^4 \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-x-6}}$ **24.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

25. $\int\limits_0^1 \frac{1+\ln x}{x}dx$ **26.** $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ **27.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$

28. $\int\limits_3^5 \frac{(2x-6)dx}{\sqrt[3]{x^2-6x+5}}$ **29.** $\int\limits_0^1 \frac{\arccos x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **30.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$

31. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x-2)^2}$ **32.** $\int\limits_0^1 \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

33. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$ **34.** $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

Пример выполнения задания 3

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, исходя из определения несобственных интегралов второго рода $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ имеет разрыв в точке $x=3$, так как $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$, поэтому

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^{3-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - 0\right) = \frac{\pi}{2},$$

т.е. интеграл сходится.

Задание 4

Установить сходимость или расходимость несобственных интегралов от неограниченных функций, используя признаки сходимости.

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ **2.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ **3.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{\left(1-x^2\right)^3}}$ **5.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+x}$ **6.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$

7. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$ **8.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+x^3}$ **9.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

10. $\int\limits_1^3 \frac{(x+2)\,dx}{x(x-1)}$ **11.** $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{x(x+1)}}$ **12.** $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^5}}$

13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{\left(1-x^5\right)^2}}$ **14.** $\int\limits_1^2 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$ **15.** $\int\limits_1^2 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}\,(2-x)}$

16. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$ **17.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{x^5}}$ **18**. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{\left(1-x^4\right)^5}}$

19. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ **20.** $\int\limits_1^2 \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx}{(x-1)\sqrt[3]{x}}$ **21.** $\int\limits_2^4 \frac{(x+1)\,dx}{x(x-2)}$

22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+2x^2}$ **23.** $\int_1^3 \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{(x-1)^3}}$ **24.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}}$

25. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[5]{x}+2\right)}$ **26.** $\int_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^7}}$ **27.** $\int_2^3 \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)dx}{\sqrt[3]{x}\,(x-2)}$

28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}+x}$ **29.** $\int_1^2 \frac{(3x+2)\,dx}{x(x-1)}$ **30.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

31. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{1-x^4}}$ **32.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^4}}$ **33.** $\int_0^4 \frac{\cos x}{\sqrt{4-x}}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx$.

Пример выполнения задания 4

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, используя признаки сходимости $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$x=0$ – точка разрыва второго рода функции $f(x)=\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$.

Сравним $f(x)$ с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Имеем: $\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Так как несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится, то, по признаку сравнения, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ тоже сходится.

ТЕМА 4

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Область определения и пределы функции нескольких переменных

Задание 1

Найти и изобразить область определения заданных функций (см. табл.3).

Таблица 3

№ варианта	Функции $z = f(x;\ y)$	
	а)	**б)**
1	$z = \dfrac{\sqrt{6x+5y-30}}{2x^2-y}$	$z = \ln(x+2) + \dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$
2	$z = \dfrac{\ln(2x+5y-10)}{3x^2-y}$	$z = e^{\sqrt{2x-6}} + \dfrac{6x+y^2}{x^2+y^2-25}$
3	$z = \dfrac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{7x+2y-14}}$	$z = \sqrt{x-4y^2} + \dfrac{4y}{\ln(6-x)}$
4	$z = \dfrac{\ln(2y^2-x)}{\sqrt{5-x}}$	$z = \sqrt{x^2+4y^2-25} + \dfrac{x^7-2}{\ln(x+y+7)}$

Продолжение табл. 3

№ варианта	Функции $z = f(x;\ y)$ а)	б)
5	$z=\dfrac{\sqrt{3x-2y-12}}{x^2+y^2-36}$	$z=\sqrt{x^2+y-5}+\dfrac{7x}{\ln(y-3)}$
6	$z=\dfrac{\ln(2-y)}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$	$z=\sqrt{x^2+y-3}+\dfrac{9+y^2}{\ln(y+1)}$
7	$z=\dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x^2+y^2-9}$	$z=\sqrt{y+x^2-4}+\dfrac{6y^7-5}{\ln(7-y)}$
8	$z=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2-16\right)}{\sqrt{x+y-4}}$	$z=\sqrt{x+y^2-5}+\dfrac{7y^3+4}{\ln(x-9)}$
9	$z=\dfrac{\ln\left(3y^2-x\right)}{\sqrt{x+7y-7}}$	$z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\dfrac{6y^7-5x}{\ln(y+2)}$
10	$z=\dfrac{\ln\left(81-x^2-y^2\right)}{(x+6)(y-5)}$	$z=\sqrt{16-x^2-y^2}+\dfrac{7y^4-6}{\ln(x+2)}$
11	$z=\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{x^2+y^2-81}}$	$z=\sqrt{49-x^2-y^2}+\dfrac{6x-5}{\ln(y+5)}$
12	$z=\dfrac{\sqrt{4x+3y+12}}{3y^2-x}$	$z=\sqrt{49-x^2-y^2}+\dfrac{5y}{\ln(x-5)}$
13	$z=\dfrac{\ln\left(x-2y^2\right)}{\sqrt{10-2x+5y}}$	$z=\sqrt{16-x^2-y^2}+\dfrac{y^2+7xy}{\ln(y+2)}$
14	$z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-64}}{x^2-16}$	$z=\ln\left(x+y^2-6\right)+\dfrac{3y^5}{\sqrt{x^2-4}}$
15	$z=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2-49\right)}{\sqrt{x+7y-7}}$	$z=\sqrt{16-x^2-y^2}+\dfrac{3xy}{\ln(x+3)}$
16	$z=\dfrac{\ln\left(64-x^2-y^2\right)}{(x+2)(y-7)}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-25}+\dfrac{\ln(x+5y)}{x-3}$

Продолжение табл. 3

№ варианта	Функции $z = f(x;\ y)$ а)	б)
17	$z=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x-8y-16}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-25}+\dfrac{4x^3}{\ln(7-y)}$
18	$z=\dfrac{\ln\left(x-4y^2\right)}{\sqrt{x-7}}$	$z=e^{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\dfrac{y^5+7}{\ln(x+y-2)}$
19	$z=\dfrac{\ln(3x-5y-15)}{\sqrt{x^2+y^2-81}}$	$z=\dfrac{\sqrt{49-x^2-y^2}}{4x-6}+\dfrac{4}{\ln(5-x)}$
20	$z=\dfrac{\sqrt{49-x^2-y^2}}{x^2-4}$	$z=\sqrt{x^2-y-3}+\dfrac{5x^2-y}{\ln(y-5)}$
21	$z=\dfrac{\ln(y+3)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$	$z=\ln\left(x^2+y^2-25\right)+\dfrac{4x}{\sqrt{y+3}}$
22	$z=\dfrac{\ln\left(y+4x^2\right)}{y+5}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\dfrac{4x+7}{\ln(x-2y)}$
23	$z=\dfrac{\ln\left(16-x^2-y^2\right)}{y^2-9}$	$z=e^{\sqrt{x+9}}+\dfrac{9y}{\ln(y+7)}$
24	$z=\dfrac{\sqrt{7x-3y+21}}{x^2+y^2-16}$	$z=\sqrt{y-x^2+2}+\dfrac{4x^2+y^3}{\ln(y+x-3)}$
25	$z=\dfrac{\ln\left(x+2y^2\right)}{(y-3)(y+4)}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\dfrac{7x-3}{\ln(y-2)}$
26	$z=\dfrac{\sqrt{36-x^2-y^2}}{(x-3)(y+4)}$	$z=\sqrt{6-x^2+y}+\dfrac{4x^3y^2}{\ln(x+2)}$
27	$z=\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$	$z=\sqrt{2-x^2+y}+\dfrac{x^2+3y}{\ln(y+6)}$
28	$z=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)-25}{\sqrt{x+y-5}}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\dfrac{9y+7}{\ln(y+6)}$

Окончание табл. 3

№ варианта	Функции $z = f(x;\ y)$	
	а)	**б)**
29	$z=\dfrac{\ln\left(x-5y^2\right)}{\sqrt{x+8y-8}}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-36}+\dfrac{7}{\ln(y-4)}$
30	$z=\dfrac{\ln\left(x-3y^2\right)}{\sqrt{12-4x+3y}}$	$z=e^{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\dfrac{x-1}{\ln(y-1)}$
31	$z=\dfrac{\ln\left(x^2-4y\right)}{\sqrt{x-2}}$	$z=e^{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\dfrac{y^3+7}{\ln(x+y-1)}$
32	$z=\dfrac{\ln\left(16-x^2-y^2\right)}{(x-1)(y+2)}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-36}+\dfrac{\ln(x+6y)}{x-4}$
33	$z=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2-9\right)}{\sqrt{x+y-1}}$	$z=\sqrt{x+y^2-2}+\dfrac{7y^3+4}{\ln(x-3)}$
34	$z=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x-y+3}$	$z=\sqrt{x^2+y^2-16}+\dfrac{4x}{\ln(2-y)}$

Пример выполнения задания 1

Найти и изобразить область определения заданных функций:

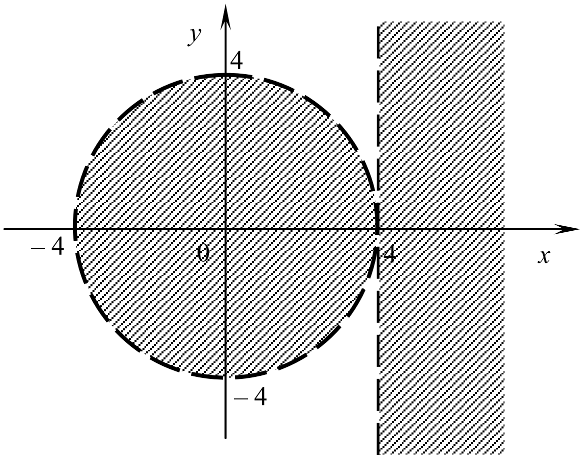
$$\textbf{а)}\ z=\frac{\ln(x-4)}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\quad \textbf{б)}\ z=\sqrt{1-x^2+y}+\frac{x^2+3y}{\ln(y-2)}.$$

Решение.

а) Функция будет иметь смысл если:

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 16-x^2-y^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x^2+y^2<4^2 \end{cases}.$$

Первое неравенство определяет полуплоскость справа от прямой $x=4$. Второе неравенство определяет часть плоскости внутри круга с центром в начале координат и радиусом $R=4$ (рис. 1).



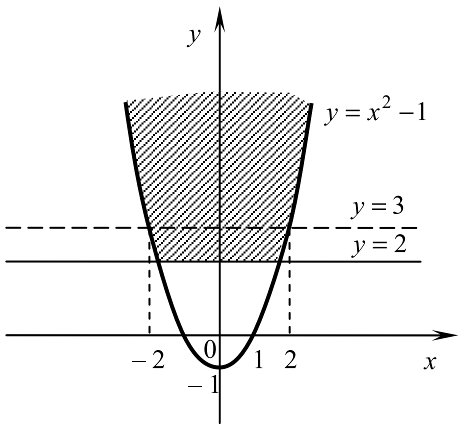
Поскольку эти области не имеют общих точек, то функция смысла не имеет, ее область определения – пустое множество: $D(f)=\{\varnothing\}$.

б) Функция будет иметь смысл если:

$$\begin{cases} 1-x^2+y\geq 0 \\ y-2>0 \\ \ln(y-2)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq x^2-1 \\ y>2 \\ y-2\neq 1, \quad y\neq 3 \end{cases}.$$

Первое неравенство определяет область над параболой $y=x^2-1$, включая параболу. Второе неравенство определяет полуплоскость над прямой $y=2$. Третье условие исключает точки, лежащие на прямой $y=3$.

Область определения $D(f)$ данной функции заштрихована на рис. 2.



Задание 2

Для заданных функций вычислить слудующие пределы:

а) $\lim\limits_{(x;\,y)\to(0;\,0)} z$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} z$; **в)** $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} z$.

1. $z=\dfrac{3xy}{x^2-y^2}$

2. $z=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$

3. $z=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$

4. $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

5. $z=x+y\sin\dfrac{1}{x}$

6. $z=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$

7. $z=\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

8. $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$

9. $z=\dfrac{xy^2}{x+y}$

10. $z=\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$

11. $z=\dfrac{xy^2+x^2y^2}{x^2+xy+y^2}$

12. $z=\dfrac{3x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$

13. $z=y+x\sin\dfrac{1}{y}$

14. $z=x\cos\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$

15. $z=\dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$

16. $z=\dfrac{\ln(1-x-y)}{\sqrt{x+y}}$

17. $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy-x^2+y^2}$

18. $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

19. $z=\dfrac{x^3+y^3}{\left(x^2-xy+y^2\right)^2}$

20. $z=y-x\cos\dfrac{1}{y}$

21. $z=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2}{1-\cos\left(x^2-y^2\right)}$

22. $z=\dfrac{x^2-2y}{x^2+3y}$

23. $z=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$

24. $z=\dfrac{1-e^{\sqrt{x+y}}}{x+y}$

25. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$

26. $z=\dfrac{\ln(1+x+y)}{x+y}$

27. $z=\dfrac{1-\cos(3x+4y)}{(3x+4y)^2}$

28. $z=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

29. $z=\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+xy+y^2}$

30. $z=y^2-x\sin\dfrac{1}{y^2}$

31. $z=\dfrac{xy}{e^{xy}-1}$

32. $z=\dfrac{x^2y^2-xy^3+y^4}{x^3y-y^2x^2+x^4}$

33. $z=x^2+y\cos\dfrac{1}{x^2}$

34. $z=\dfrac{xy^2}{\sqrt[3]{x-y}}$.

Пример выполнения задания 2

Для заданной функций $z=\dfrac{\ln(1-x-y)}{(x+y)^2}$ вычислить слудующие пределы: **а)** $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} z$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} z$; **в)** $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} z$.

Решение.

а) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{\ln(1-x-y)}{(x+y)^2}=$

Пусть $x+y=t$, тогда при $\left.\begin{matrix}x\to0\\ y\to0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ t\to0$, получим

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{t^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

Используем правило Лопиталя:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-1}{1-t}}{2t}=\frac{-1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1-t)t}=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1-x-y)}{(x+y)^2}=$ вычисляем внутренний предел, считая $x=const$,

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ используем правило Лопиталя:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(1-x)}=\infty.$$

в) аналогично (**б**) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x-y)}{(x+y)^2}=\infty$.

4.2. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Задание 1

Найти все частные производные первого порядка от данных функций.

1. $u=4\ln\left(3+x^2\right)-8xyz$

2. $u=x\sqrt{y}+(y+z)\sqrt{x}$

3. $u=x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$

4. $u=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$

5. $u=2\ln\left(x^2-5\right)-4xyz$

6. $u=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$

7. $u=\dfrac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}$

8. $u=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2}$

9. $u=xz^2-\sqrt[3]{x^2y}$

10. $u=xy+\ln\left(x^2-y^2\right)$

11. $u = x\sqrt{y} - yz^2$

12. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z}$

13. $u = \ln\left(x^2 + y^2\right) - 4xyz$

14. $u = x\left(\ln y - \operatorname{arctg} z\right)$

15. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xz$

16. $u = \sin\left(x + 2y\right) + \sqrt{xyz}$

17. $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}$

18. $u = x^2 + \sqrt{z^2 + y^2}$

19. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$

20. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$

21. $u = z^2 + \operatorname{arctg}\left(x - y\right)$

22. $u = x^2 y^2 z - \ln\left(z - x\right)$

23. $u = xy - \dfrac{x}{z}$

24. $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}}$

25. $u = x^2 + \operatorname{arctg}\left(x + y\right)$

26. $u = 2\sqrt{x + y} + y \operatorname{arctg} z$

27. $u = xy + \ln\left(z^2 + x^2\right) + xyz$

28. $u = \ln\left(z^2 + x^2\right) + xyz$

29. $u = y\ln\left(1 + x^2\right) - \operatorname{arctg} z$

30. $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$

31. $u = xy^2 z + \ln\left(3 - x^2\right)$

32. $u = \ln\left(z + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

33. $u = y^2 + \operatorname{arcctg}\sqrt{x - y}$

34. $u = \ln\left(x^2 - 3z\right) + xy^2 z$.

Пример выполнения задания 1

Найти все частные производные первого порядка от данной функции:

$$u = x\ln\left(1 - y^3\right) + \arcsin z\ .$$

Решение. При вычислении $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ переменные y и z считаются постоянными величинами: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \ln\left(1 - y^3\right)$.

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial y}$ переменные x и z считаются постоянными величинами: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-3xy^2}{1-y^3}$.

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial z}$ переменные x и y считаются постоянными величинами: $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

Задание 2

Найти полный дифференциал функции u в точке M_0.

1. $u = \frac{yz^2}{x^2}$, M_0 (1; 2; 1)

2. $u = \frac{yz^2}{y}$, M_0 (2; 2; 1)

3. $u = x^2yz^3$, M_0 (– 1; 2; 1)

4. $u = \frac{yz^2}{x}$, M_0 (– 1; – 2; – 1)

5. $u = \frac{z^3}{xy^2}$, M_0 (– 1; – 2; 1)

6. $u = \frac{xy^2}{z^2}$, M_0 (1; 2; – 1)

7. $u = \frac{z}{x^3y^2}$, M_0 (1; 1; – 2)

8. $u = \frac{x^3y^2}{z}$, M_0 (– 1; 2; – 1)

9. $u = \frac{x^2}{yz^2}$, M_0 (2; – 1; – 1)

10. $u = \frac{1}{x^2yz}$, M_0 (1; – 2; 1)

11. $u = \frac{z^2}{xy^2}$, M_0 (2; 1; 1)

12. $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, M_0 (1; – 2; – 1)

13. $u = xy^2z^2$, M_0 (1; 1; 2)

14. $u = x^2yz^3$, M_0 (2; – 1; 1)

15. $u = \frac{y^3}{x^2z}$, M_0 (– 1; 1; 2)

16. $u = \frac{yz^2}{x^2}$, M_0 (2; 1; – 1)

17. $u = x^2 y^2 z$, M_0 (1; – 1; 2) **18.** $u = \dfrac{1}{xy^2 z}$, M_0 (– 2; – 1; 1)

19. $u = \dfrac{x}{yz^2}$, M_0 (1; 1; – 2) **20.** $u = \dfrac{1}{xyz}$, M_0 (2; – 1; – 1)

21. $u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2}$, M_0 (– 1; – 1; 2) **22.** $u = \dfrac{x}{y^2 z^3}$, M_0 (– 2; 1; – 1)

23. $u = \dfrac{y^2 z^3}{x}$, M_0 (1; – 1; – 2) **24.** $u = x^2 yz$, M_0 (– 2; – 1; – 1)

25. $u = \dfrac{y}{xz^2}$, M_0 (– 1; 1; – 2) **26.** $u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2}$, M_0 (2; 2; 1)

27. $u = \dfrac{yz^2}{x}$, M_0 (– 1; – 1; – 2) **28.** $u = \dfrac{x^2 z}{y^3}$, M_0 (2; 2; – 1)

29. $u = \dfrac{z^2}{y^2 x^2}$, M_0 (2; 1; 1) **30.** $u = \dfrac{x}{yz^2}$, M_0 (– 2; 2; – 1)

31. $u = \dfrac{x^2}{y^2 z^2}$, M_0 (– 2; 1; 1) **32.** $u = \dfrac{x^3}{y^2 z}$, M_0 (2; – 2; 1)

33. $u = \dfrac{z^3}{xy^2}$, M_0 (– 1; 2; 1) **34.** $u = \dfrac{z^2 x^3}{y^2}$, M_0 (– 1; 1; 1).

Пример выполнения задания 2

Найти полный дифференциал функции $u = \dfrac{x^2}{y^3 z^2}$ в точке M_0 (– 2; 1; 2).

Решение. Полный дифференциал функции имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz .$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3z^2}\bigg|_{\substack{x=-2\\y=1\\z=2}}=\frac{-4}{4}=-1\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3\,\frac{x^2}{y^4z^2}\bigg|_{\substack{x=-2\\y=1\\z=2}}=\frac{-3\cdot 4}{4}=-3\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-2\,\frac{x^2}{y^3z^3}\bigg|_{\substack{x=-2\\y=1\\z=2}}=\frac{-2\cdot 4}{8}=-1\,.$$

Таким образом: $du=-dx-3dy-dz$.

Задание 3

Вычислить значение производной сложной функции $z=z(x;y)$, где $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ при $t=t_0$ (см. табл.4).

Таблица 4

№ вариант	$z=z(x;y)$	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$	$t=t_0$
1	$u=e^{x-2y}$	$\begin{cases} x=\sin t \\ y=t^3 \end{cases}$	$t_0=0$
2	$u=\ln\left(e^x+e^{-y}\right)$	$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$	$t_0=-1$
3	$u=y^x$	$\begin{cases} x=\ln(t-1) \\ y=e^{\frac{1}{2}} \end{cases}$	$t_0=2$
4	$u=e^{y-2x+2}$	$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$	$t_0=\dfrac{\pi}{2}$

Продолжение табл. 4

№ вариант	$z = z(x; y)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$t = t_0$
5	$u = x^2 e^y$	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t_0 = \pi$
6	$u = \ln\left(e^x + e^y\right)$	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	$t_0 = 1$
7	$u = x^y$	$\begin{cases} x = e^t \\ y = \ln t \end{cases}$	$t_0 = 1$
8	$u = e^{y-2x}$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^3 \end{cases}$	$t_0 = 0$
9	$u = x^2 e^{-y}$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$	$t_0 = \dfrac{\pi}{2}$
10	$u = \ln\left(e^{-x} + e^y\right)$	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	$t_0 = -1$
11	$u = e^{y-2x-1}$	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t_0 = \dfrac{\pi}{2}$
12	$u = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \pi$
13	$u = \arccos\left(\dfrac{2x}{y}\right)$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \pi$
14	$u = \dfrac{x^2}{y+1}$	$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$	$t_0 = 0$
15	$u = \dfrac{x}{y}$	$\begin{cases} x = e^t \\ y = 2 - e^{2t} \end{cases}$	$t_0 = 0$

Продолжении табл. 4

№ вариант	$z = z(x; y)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$t = t_0$
16	$u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right)$	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$	$t_0 = 1$
17	$u = \sqrt{x + y^2 + 3}$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$	$t_0 = 1$
18	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \pi$
19	$u = \frac{y^2}{x}$	$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + \operatorname{arctg} t \end{cases}$	$t_0 = 0$
20	$u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \frac{\pi}{4}$
21	$u = \sqrt{x^2 + y + 3}$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$	$t_0 = 1$
22	$u = \arcsin\left(\frac{x}{2y}\right)$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \pi$
23	$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$	$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$	$t_0 = \frac{\pi}{4}$
24	$u = \sqrt{x + y + 3}$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$	$t_0 = 1$
25	$u = \frac{y}{x}$	$\begin{cases} x = e^t \\ y = 1 - e^{2t} \end{cases}$	$t_0 = 0$
26	$u = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right)$	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$	$t_0 = \pi$

Окончание табл. 4

№ вариант	$z = z(x;y)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$t = t_0$
27	$u = \ln\left(e^{2x} + e^{y}\right)$	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$	$t_0 = 1$
28	$u = \operatorname{arctg}(x + y)$	$\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 4 - t^2 \end{cases}$	$t_0 = 1$
29	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$	$t_0 = 1$
30	$u = \operatorname{arctg}(xy)$	$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = e^{t} \end{cases}$	$t_0 = 0$
31	$u = \dfrac{y^2}{x - 1}$	$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$	$t_0 = 0$
32	$u = \ln\left(e^{-2x} + e^{y}\right)$	$\begin{cases} x = -t^2 \\ y = t + 1 \end{cases}$	$t_0 = 1$
33	$u = \sqrt{x^2 + y + 8}$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$	$t_0 = 1$
34	$u = \operatorname{arcctg}(x - 2y)$	$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 3 - t \end{cases}$	$t_0 = 1$
35	$u = e^{2x+3y-1}$	$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 3t \end{cases}$	$t_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Пример выполнения задания 3

Вычислить значение производной сложной функции $u = e^{2x+3y-1}$, где $\begin{cases} x = \cos(3t), \\ y = \sin(3t), \end{cases}$ при $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

имеем

$$\frac{du}{dt} = 2e^{2x+3y-1} \cdot (-3\sin 3t) + 3e^{2x+3y-1} \cdot 3\cos 3t.$$

Подставим вместо x и y их выражения через t:

$$\frac{du}{dt} = 3e^{2\cos 3t + 3\sin 3t - 1} \cdot (3\cos 3t - 2\sin 3t).$$

При $t = \dfrac{\pi}{6}$, $\qquad \dfrac{du}{dt} = -6e^2$.

Задание 4

Найти частные производные неявной функции $z = z(x, y)$.

1. $z^3 + y^3 - 3yz - x = 0$

2. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$

3. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz = 16$

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$

7. $y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz = 4$

8. $xy + xz^2 + yz = 8$

9. $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 4x = 6$

10. $z^3 - 3xyz = 8$

11. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$

12. $x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x + 4z = 5$

13. $x^2 y^2 - z^3 x + z^4 = 16$

14. $x^2 + y^2 + z^2 = y \ln \dfrac{z}{y}.$

15. $x^2 + y^2 + z^2 = x^4 + y^4 + z^4$

16. $x + y + z = e^z$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

18. $x + y + z = xyz$

19. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

20. $\dfrac{x}{z} = 1 + \ln \dfrac{z}{y}$

21. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$

22. $z^3 - xz + y = 0$

23. $(2x + 3y + 4z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

24. $xe^x + ye^y = ze^z$

25. $3x^2 y^2 + 2xyz^2 - 2x^2 z + 4y^2 z = 4$

26. $3x^4 - 4y^3 z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$

27. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$

28. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10$

29. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + y^2 - z^2)$

30. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$

31. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$

32. $x^3 + y^3 - 3xy - z = 0$

33. $y^3 - 3xyz = 9$

34. $\dfrac{y}{x} = 1 + \ln \dfrac{x}{z}.$

Пример выполнения задания 4

Найти частные производные неявной функции $ze^z + ye^y = xe^x$.

Решение. Частные производные неявной функции двух переменных $z = z(x; y)$, задано с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, вычисляются по формулам $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Имеем $F(x, y, z) = ze^z + ye^y - xe^x$, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x - xe^x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + ye^y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + ze^z.$$

Таким образом, получаем: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x(1+x)}{e^z(1+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{e^y(1+y)}{e^z(1+z)}$.

Задание 5

Записать уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (см. табл.5).

Таблица 5

№ варианта	Уравнение поверхности S	Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 5 = 0$	$M_0(2,\ 2,\ -1)$
2	$x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$	$M_0(-2,\ 1,\ 2)$
3	$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$	$M_0(1,\ 2,\ 1)$
4	$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$	$M_0(-1,\ 1,\ 2)$
5	$2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 11$	$M_0(2,\ 2,\ -1)$
6	$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$	$M_0(2,\ 1,\ -1)$
7	$x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$	$M_0(1,\ 2,\ -3)$
8	$x^2 + y^2 - xz - yz = 0$	$M_0(0,\ 2,\ 2)$

Продолжение табл. 5

№ варианта	Уравнение поверхности S	Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$
9	$x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2$	$M_0(1, 1, 1)$
10	$y^2 + x^2 - z^2 - 2xz + 2x = z$	$M_0(1, 1, 1)$
11	$z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y$	$M_0(-1, -1, -1)$
12	$z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y$	$M_0(1, -1, 1)$
13	$z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$	$M_0(-1, 1, 1)$
14	$x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$	$M_0(3, 1, 2)$
15	$4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$	$M_0(1, -2, 1)$
16	$z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$	$M_0(2, 1, 0)$
17	$2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$	$M_0(1, 2, 1)$
18	$x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$	$M_0(3, 1, 4)$
19	$x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$	$M_0(1, 1, 2)$
20	$x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5$	$M_0(-2, 1, 0)$
21	$x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$	$M_0(1, 4, -1)$
22	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8$	$M_0(0, 2, 0)$
23	$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$	$M_0(-1, -1, 1)$
24	$x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z$	$M_0(1, 0, 1)$
25	$2x^2 + z^2 - y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$M_0(1, -1, 1)$
26	$x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8$	$M_0(1, 1, 0)$
27	$z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$	$M_0(-1, 1, 3)$

Окончание табл. 5

№ варианта	Уравнение поверхности S	Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$
28	$z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15$	$M_0(-1,\ 3,\ 4)$
29	$z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$	$M_0(-7,\ 1,\ 8)$
30	$z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$	$M_0(1,\ -1,\ 2)$
31	$x^2 + y^2 + z^2 - 3z + 5y - 11 = 0$	$M_0(-1,\ 1,\ -1)$
32	$x^2 - y^2 + z^2 - xy - 6 = 0$	$M_0(2,\ -1,\ 1)$
33	$x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - z + 3 = 0$	$M_0(1,\ -2,\ 1)$
34	$3x^2 - y^2 + z^2 - x + 2y + 5 = 0$	$M_0(1,\ -2,\ -1)$

Пример выполнения задания 5

Записать уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S: $x^2 + 3y^2 - z^2 - 2yz + x = 5$ в точке $M_0(1,\ -1,\ 2)$.

Решение. Если уравнение поверхности представить в виде $F(x, y, z) = 0$, то тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 поверхности имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

А уравнение нормали к поверхности в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Находим частные производные функции

$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 2yz + x - 5$ в точке $M_0(1,\ -1,\ 2)$:

$F'_x = 2x + 1, \qquad F'_x(M_0) = 3;$

$F'_y = 6y - 2z, \qquad F'_y(M_0) = -8;$

$F'_z = -2z - 2y, \quad F'_z(M_0) = -2.$

Таким образом: $3(x-1) - 8(y+1) - 2(z-2) = 0$ или

$3x - 8y - 2z + 7 = 0$ – уравнение касательной плоскости,

$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-8} = \dfrac{z-2}{-2}$ – уравнение нормали к поверхности.

Задание 6

Найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

1. $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$, $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$.

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(3;\ 4)$, $B(-1;\ 2)$.

3. $z = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$, $A(2;\ 1)$, $B(-2;\ -1)$.

4. $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$, $A(2;\ -1)$, $B(5;\ 3)$.

5. $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2;\ 1)$, $B(-2;\ -2)$.

6. $z = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$, $A(2;\ -1)$, $B(-2;\ 1)$.

7. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$.

8. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $A(1;\ 3)$, $B(-2;\ 4)$.

9. $z = x^y$, $A(2;\ 2)$, $B(-4;\ -6)$.

10.	$z=2x\sqrt{y}+\dfrac{3y}{\sqrt[3]{x}}$,	$A(1;\ 4)$,	$B(-3;\ 1)$.
11.	$z=x-3y+\sqrt{3xy}$,	$A(3;\ 4)$,	$B(1;\ -2)$.
12.	$z=e^{-xy}$,	$A(-2;\ 1)$,	$B(3;\ -4)$.
13.	$z=e^{-\frac{x}{y}}$,	$A\left(1;\ \dfrac{1}{2}\right)$,	$B\left(3;\ \dfrac{3}{2}\right)$.
14.	$z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$,	$A(2;\ -1)$,	$B(3;\ -3)$.
15.	$z=(1+xy)^{y}$,	$A(1;\ 1)$,	$B(3;\ -2)$.
16.	$z=\ln\left(x^2+2y^2+2\right)$,	$A(1;\ -1)$,	$B(-2;\ -4)$.
17.	$z=\ln(x+\ln y)$,	$A(1;\ 1)$,	$B(4;\ 2)$.
18.	$z=e^{-2xy}$,	$A(1;\ 1)$,	$B(-2;\ 2)$.
19.	$z=xy\ln(x+y)$,	$A(2;\ -1)$,	$B(3;\ 2)$.
20.	$z=\operatorname{arctg} xy$,	$A(1;\ 1)$,	$B(-2;\ -2)$.
21.	$z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$,	$A(2;\ 2)$,	$B(6;\ 5)$.
22.	$z=\arcsin\sqrt{xy}$,	$A\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$,	$B\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.
23.	$z=\operatorname{arctg}(x-y)^2$, ,	$A(2;\ 1)$,	$B(0;\ -4)$.
24.	$z=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}$,	$A(4;\ 1)$,	$B(2;\ -4)$.
25.	$z=\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$,	$A(4;\ 3)$,	$B(1;\ -1)$.
26.	$z=\ln\left(x^2-3\right)-4xy$,	$A(2;\ 1)$,	$B(-2;\ -4)$.
27.	$z=xe^{x+y}$,	$A(2;\ -1)$,	$B(3;\ 5)$.
28.	$z=3y-\sqrt{xy}$,	$A(2;\ 2)$,	$B(-4;\ -3)$.

29. $z = ye^{x-y}$, $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 3)$.

30. $z = \arcsin(xy)$, $A(1{,}5;\ 0{,}5)$, $B(0{,}5;\ 1{,}5)$.

31. $z = xy^2 - 3x^2\sqrt{y}$, $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$.

32. $z = \ln(4 + \sqrt{3x^2 + y^2})$, $A(1;\ 0)$, $B(-1;\ -2)$.

33. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-y}$, $A(1;\ -1)$, $B(2;\ -2)$.

34. $z = (1 + 3xy)^x$, $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 2)$.

Пример выполнения задания 6

Найти производную функции $z = \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$ в точке $A(1;\ 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. Дано: $B(-1;\ 1)$.

Решение. Производная функции $z = f(x,\ y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{e}$ имеет вид:

$$\frac{\partial z(A)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial z(A)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\cos\beta,$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{e}$.

Находим значение частных производных функции в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 3y^2 + 1}, \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial x} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{x^2 + 3y^2 + 1}, \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial y} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Направление задается вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{e} = (-1-1;\ 1-2) = (-2;\ -1)$.

Модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, тогда направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

Имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{e}} = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{(-2)}{\sqrt{5}} + \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{(-1)}{\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{7\sqrt{5}}$.

Функция в заданном направлении убывает со скоростью $\dfrac{8}{7\sqrt{5}}$.

Задание 7

Найти скорость изменения функции $u = \varphi(x,\ y,\ z)$ в точке A в направлении вектора $\vec{s}$.

1. $u = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{s} = (2;\ -6;\ 3)$.

2. $u = x^2 + 3y^2 - 2yz^2$, $A(8;\ -4;\ 2)$, $\vec{s} = (1;\ -2;\ 2)$.

3. $u = x^2 + y^2 - 3xz^2$, $A(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{s} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

4. $u = 3x^2 + y^2 + 2z^2$, $A(1;\ -2;\ 3)$, $\vec{s} = (1;\ 1;\ 1)$.

5. $u = x^3 + 3x^2 z + 6xy - y^2$, $A(1;\ -1;\ 1)$, $\vec{s} = (6;\ -2;\ -3)$.

6. $u = x^3 + y^3 - 3xz$, $A(-1;\ -1;\ 2)$, $\vec{s} = (-3;\ 2;\ 6)$.

7. $u = x^2 + y^2 - 2xyz^2$, $A(-1;\ -2;\ 3)$, $\vec{s} = (2;\ -1;\ 2)$.

8. $u = x^2 yz^2$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{s} = (2;\ -2;\ -1)$.

9. $u = y^2 z - x^2 y$, $A(2;\ 1;\ 1)$, $\vec{s} = (3;\ 2;\ -6)$.

10. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y}$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{s} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

11. $u = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{xz^2}$, $A\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{s} = (1;\ -1;\ 2)$.

12. $u=\frac{4\sqrt{6}}{xy}-\frac{\sqrt{6}}{9yz}+\frac{3}{xz}$, $A\left(2;\ \frac{1}{3};\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\vec{s}=(-1;\ -1;\ 5)$.

13. $u=9\sqrt{2}x^3y-\frac{y^3}{2\sqrt{z}}-\frac{4z}{\sqrt{3}}$, $A\left(\frac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\vec{s}=(1;\ -1;\ 1)$.

14. $u=9y^3z+\frac{x^3}{2y}+3\sqrt{6}\,z^3$, $A\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{s}=(1;\ 1;\ 2)$.

15. $u=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{yz}-\frac{1}{\sqrt{6z}}$, $A\left(1;\ 2;\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{s}=(-1;\ -1;\ 2)$.

16. $u=3\sqrt{2}\,x^2z+\frac{y^2}{\sqrt{2x}}-3\sqrt{2}\,z^2$, $A\left(\frac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\vec{s}=(2;\ -1;\ -1)$.

17. $u=6\sqrt{6}\,x^3y-6\sqrt{6}\,y^3+2z^3$, $A(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{s}=(1;\ -1;\ -2)$.

18. $u=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz}$, $A(-2;\ 3;\ 4)$, $\vec{s}=(2;\ -2;\ 1)$.

19. $u=3\sqrt{2}\,x^2y+\frac{y^2z}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\,z^2$, $A\left(\frac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\vec{s}=(3;\ -6;\ 2)$.

20. $u=\frac{3}{xz}+\frac{4}{y^2}-\frac{1}{\sqrt{6}yz}$, $A\left(1;\ 2;\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{s}=(-2;\ -2;\ 1)$.

21. $u=xy^2+z^3-xyz$, $A\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$, $\vec{s}=(2;\ 2;\ 1)$.

22. $z=x(y+z)$, $A(-2;\ -1;\ 0)$, $\vec{s}=(6;\ 3;\ -2)$.

23. $u=x^2+y^2z-xyz^2$, $A(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{s}=(-2;\ -1;\ -2)$.

24. $u=y^3z^2+y^2z-xyz^2$, $A(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{s}=(-2;\ -1;\ -2)$.

25. $u=\frac{1}{\sqrt{xz}}-\frac{2}{y^3z}-\frac{3x}{yz}$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{s}=(2;\ 2;\ -3)$.

26. $u=y^2-3xy+2z^2$, $A(-1;\ -2;\ -3)$, $\vec{s}=(3;\ 2;\ -2)$.

27. $u = xy^2 + xy - 2xz$, $A(1;\ 0;\ -2)$, $\vec{s} = (2;\ -2;\ -1)$.

28. $u = xz - 4z + 5yz$, $A(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{s} = (-2;\ -1;\ -2)$.

29. $u = 3xyz - 2yz - z^2$, $A(2;\ 2;\ -1)$, $\vec{s} = (3;\ 2;\ -4)$.

30. $u = xz - 4xyz + x^3 z$, $A(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{s} = (-2;\ -1;\ -2)$.

31. $u = x^2 - 3y^2 + 4zx - 1$, $A(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{s} = (2;\ -1;\ -2)$.

32. $u = x^3 + xy^2 - z^2 + 5$, $A(1;\ 2;\ -1)$, $\vec{s} = (2;\ -3;\ 6)$.

33. $u = \sqrt[3]{x} \cdot y^2 + 3zy - 1$, $A(1;\ -1;\ 1)$, $\vec{s} = (-1;\ 2;\ 2)$.

34. $u = \dfrac{2}{xy^2} + \dfrac{1}{zy^2} - \dfrac{1}{zx}$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{s} = (2;\ 1;\ 2)$.

Пример выполнения задания 7

Найти скорость изменения функции $u = xz^2 - 3y\sqrt{z} + yx^2$ в точке $A(2;\ -1;\ 1)$ в направлении вектора $\vec{s} = (-2;\ -1;\ 2)$.

Решение. Находим значение частных производных в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 + 2yx, \qquad \frac{\partial u(A)}{\partial x} = -3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3\sqrt{z} + x^2, \qquad \frac{\partial u(A)}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz - \frac{3y}{2\sqrt{z}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 5{,}5.$$

Модуль вектора $\vec{s}$ равен:

$$|\,\vec{s}\,| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3.$$

Направляющие косинуса вектора $\vec{s}$:

$$\cos\alpha = \frac{-2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Тогда производная функции в заданном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=-3\left(-\frac{2}{3}\right)+1\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{3}.$$

Функция в направлении вектора $\vec{s}$ возрастает со скоростью $\frac{16}{3}$.

Задание 8

Найти направление наискорейшего возрастания функции $u=\varphi(x,\ y)$ в точке A и скорость ее возрастания в этом направлении.

1. $u=\ln(x+y)$, $A(-1;\ 2)$.

2. $u=xy+2\sqrt{xy}$, $A\left(8;\ \frac{1}{2}\right)$.

3. $u=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$, $A\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

4. $u=e^{-\frac{x}{y}}$, $A\left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$.

5. $u=\operatorname{arctg}(x-y)^2$, $A(1;\ 2)$.

6. $u=(1+xy)^x$, $A(1;\ 1)$.

7. $u=\ln(2+\sqrt{x^2+y^2})$, $A(4;\ 3)$.

8. $u=\ln(x+\ln x)$, $A(1;\ 1)$.

9. $u=xe^{x+y}$, $A(-1;\ 2)$.

10. $u=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$, $A(2;\ -1)$.

11. $u=ye^{x-y}$, $A(2;\ -1)$.

12. $u=\ln(2x^2+y^2+2)$, $A(1;\ -1)$.

13. $u=\ln(y+\ln x)$, $A(1;\ 1)$.

14. $u=e^{-2xy}$, $A(-1;\ 1)$.

15. $u=\operatorname{arctg}(xy)$, $A(1;\ 1)$.

16. $u=\arcsin\frac{x}{x+y}$, $A(1;\ 1)$.

17. $u=\arcsin\sqrt{xy}$, $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

18. $u=\ln(x^2+4y^2)$, $A(2;\ 1)$.

19. $u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{y}{\sqrt{x}}$, $A(4;\ 1)$.

20. $u=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $A(2;\ 1)$.

21. $u=\ln\left(x^2-3\right)-4xy$, $A(2;\,1)$.

22. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $A(1;\,4)$.

23. $u=3y-\sqrt{xy}$, $A(2;\,8)$.

24. $u=x^y$, $A(2;\,2)$.

25. $u=\arcsin(xy)$, $A\left(\dfrac{3}{2};\,\dfrac{1}{2}\right)$.

26. $u=x-3y+\sqrt{3xy}$, $A(3;\,4)$.

27. $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $A(4;\,3)$.

28. $u=e^{-2xy}$, $A(1;\,-2)$.

29. $u=\ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$, $A(2;\,-1)$.

30. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $A(1;\,-3)$.

31. $u=\ln(2x-3y)$, $A(2;\,1)$.

32. $u=\arcsin\sqrt{xy}$, $A(1;\,4)$.

33. $u=y\cdot e^{2x-y}$, $A(1;\,1)$.

34. $u=xy^2-\sqrt{xy}$, $A(4;\,1)$.

Пример выполнения задания 8

Найти направление наискорейшего возрастания функции $u=\ln\left(y-\dfrac{1}{x}\right)$ в точке $A(1;\,2)$ и скорость ее возрастания в этом направлении.

Решение. Направление наискорейшего возрастания функции в точке A определяется вектором градиентом

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u(A)}{\partial x},\ \frac{\partial u(A)}{\partial y}\right).$$

Находим частные производные функции в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{yx^2-x},\qquad \frac{\partial u(A)}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y-\frac{1}{x}},\qquad \frac{\partial u(A)}{\partial x}=1.$$

Таким образом: $\operatorname{grad} u = (1;\ 1)$. Модуль вектора градиента равен скорости изменения функции в его направлении.

Следовательно, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{2}$ – скорость наискорейшего роста функции в точке A.

Задание 9

Найти все частные производные второго порядка.

1.	$z = xy^2 - x^2 y$	**2.**	$z = \cos x \cos y$
3.	$z = xy + \cos(x + y)$	**4.**	$z = xy - \cos(x + y)$
5.	$z = x^2 y + xy^2$	**6.**	$z = xy + \cos(x + y)$
7.	$z = xy - \sin(x + y)$	**8.**	$z = y \ln x$
9.	$z = xy^3 - x^3 y$	**10.**	$z = x \ln y$
11.	$z = xy^3 + x^3 y$	**12.**	$z = x \sin xy$
13.	$z = x^2 y^3$	**14.**	$z = y \sin xy$
15.	$z = \sin x \cos y$	**16.**	$z = xe^{xy}$
17.	$z = \sin x \sin y$	**18.**	$z = ye^{xy}$
19.	$z = \cos x \sin y$	**20.**	$z = x \cos y$
21.	$z = y \cos xy$	**22.**	$z = x^3 y^3 + x^3 + y^3$
23.	$z = e^{xy}$	**24.**	$z = x^2 + y^2 + x^2 y^2$
25.	$z = x \cos(x + 2y)$	**26.**	$z = 2^{x+y}$
27.	$z = y \cos(2x + y)$	**28.**	$z = 3^{x-y}$
29.	$z = x \sin(x - 2y)$	**30.**	$z = e^{x-2y}$
31.	$z = y \cos(y - 2y)$	**32.**	$z = e^{2x-y}$
33.	$z = x \cos xy^2$	**34.**	$z = x^2 e^{3xy^2}$.

Пример выполнения задания 9

Найти все частные производные второго порядка $z = y^2 e^{x^2 y}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 \cdot xe^{x^2 y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2 y} + y^2 x^2 e^{x^2 y}.$$

Находим «чистые» частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y^3 e^{x^2 y} + 4y^4 x^2 e^{x^2 y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2e^{x^2 y} + 2yx^2 e^{x^2 y} + 2yx^2 e^{x^2 y} + y^2 x^4 e^{x^2 y} =$$

$$= 2e^{x^2 y} + 4yx^2 e^{x^2 y} + y^2 x^4 e^{x^2 y}.$$

Находим «смешанную» частную производную второго порядка, при этом порядок дифференцирования не имеет значения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4y^2 xe^{x^2 y} + 2y^2 xe^{x^2 y} + 2y^3 x^3 e^{x^2 y} =$$

$$= 6y^2 xe^{x^2 y} + 2y^3 x^3 e^{x^2 y}.$$

Задание 10

Найти частные производные указанного порядка от данных функций.

1. $z = x\ln(xy)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

2. $z = e^{x^2 y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

3. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

4. $z = xye^{x+y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5. $z = e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

7. $z = \sin\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

8. $z = e^{\frac{y}{x}}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = ?$

9. $z = 2^{x^2 y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x\, \partial y^3} = ?$

10. $z = \cos\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = ?$

11. $z = 2^{xy^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

12. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

13. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

14. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

15. $z = x^3 \sin y + y^3 \cos x$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3\, \partial y} = ?$

16. $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

17. $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{x+y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = ?$

18. $z = \ln \operatorname{tg}(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = ?$

19. $z = \ln\left(x + y^2\right)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

20. $z = x^2 \ln(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = ?$

21. $z = x^2 y + \dfrac{x^3}{y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

22. $z = y \ln(xy)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

23. $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

24. $z = y^3 \sin x + x^3 \cos y$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} = ?$

25. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

26. $z = xy^2 + \dfrac{y^3}{x}$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

27. $z = y^2 \ln(x + y)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = ?$

28. $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

29. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

30. $z = xy\cos(x - y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

31. $z = xy\cos(x + y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

32. $z = xy\sin(x + y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

33. $z = \operatorname{arctg} y\sqrt{x}$ **,** $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

34. $z = x\ln(x - y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = ?$

Пример выполнения задания 10

Найти частную производную третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функций $z = xy^2 - \frac{y}{x^2}$.

Решение. Порядок дифференцирования не имеет значения. Найдем частную производную по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - \frac{1}{x^2} = 2xy - x^{-2}.$$

Полученное выражение дважды продифференцируем по x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y + 2x^{-3},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}.$$

Задание 11

Найти дифференциал второго порядка $d^2 z$.

1.	$z = xy^2 - x^2 y$	**2**	$z = \cos x \cos y$
3.	$z = xy + \cos(x + y)$	**4.**	$z = xy - \cos(x + y)$
5.	$z = x^2 y + xy^2$	**6.**	$z = xy + \cos(x + y)$
7.	$z = xy - \sin(x + y)$	**8.**	$z = y \ln x$
9.	$z = xy^3 - x^3 y$	**10.**	$z = x \ln y$
11.	$z = xy^3 + x^3 y$	**12.**	$z = x \sin xy$
13.	$z = x^2 y^3$	**14.**	$z = y \sin xy$

15. $z = \sin x \cos y$

16. $z = xe^{xy}$

17. $z = \sin x \sin y$

18. $z = ye^{xy}$

19. $z = \cos x \sin y$

20. $z = x \cos y$

21. $z = y \cos xy$

22. $z = x^3 y^3 + x^3 + y^3$

23. $z = e^{xy}$

24. $z = x^2 + y^2 + x^2 y^2$

25. $z = x \cos(x + 2y)$

26. $z = 2^{x+y}$

27. $z = y \cos(2x + y)$

28. $z = 3^{x-y}$

29. $z = x \sin(x - 2y)$

30. $z = e^{x-2y}$

31. $z = y \cos(y - 2y)$

32. $z = e^{2x-y}$

33. $z = 3xy^2 - 2x^3 y$

34. $z = x \sin(3x - 2y)$.

Пример выполнения задания 11

Найти дифференциал второго порядка $d^2 z$ функции $z = 5^{2x-3y}$.

Решение. Дифференциал второго порядка $d^2 z$ вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2 dy^2} dy^2 .$$

Последовательно найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 5^{2x-3y} \ln 5 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3 \cdot 5^{2x-3y} \ln 5 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \cdot 5^{2x-3y} \ln^2 5 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -6 \cdot 5^{2x-3y} \ln^2 5\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9 \cdot 5^{2x-3y} \ln^2 5\,.$$

Таким образом, получаем:

$$d^2 z = 5^{2x-3y} \cdot \ln^2 5 \left(4\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 9\,dy^2 \right).$$

4.3. Экстремум функции нескольких переменных

Задание 1

Исследовать функцию на экстремум.

1. $z = 10 + 2xy - x^2$

2. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$

3. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$

4. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6$

5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$

6. $z = 2x^2 + y^2 - xy + 3x - 2$

7. $z = 3x^2 - y^2 + 8xy + 4y - 5$

8. $z = x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 6$

9. $z = 2x^2 - 3y^2 - xy + 5x + y$

10. $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 6$

11. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 2$

12. $z = 3 + 4x + 6y - 4x^2 - 9y^2$

13. $z = x^2 + y^2 - 2y + 5$

14. $z = 9x^2 + 4y^2 - 6x - 4y + 3$

15. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

16. $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y$

17. $z = 8x^2 - 3xy - 3y^2 - y + x$

18. $z = x^2 - 3xy + 5y^2 + 4$

19. $z = 2x^2 + xy + 5x + y^2$

20. $z = 3xy - 5x^2 - y^2 - 4$

21. $z = y^2 - xy + 8x$

22. $z = x^2 - 2xy - 10$

23. $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 10$

24. $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y$

25. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3$

26. $z = 4xy - 3x^2 - 12y^2 + 4x + 8y - 5$

27. $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y$

28. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y - 4$

29. $z = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 18x + 18y$

30. $z = 4xy - 12x^2 - 3y^2 + 8x + 4y$

31. $z = 3x^2 + 12y^2 - 4xy - 4x + 8y - 5$

32. $z = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y$

33. $z = 2x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 2y$

34. $z = -3x^2 + xy - y^2 + 9x + 4y$.

Пример выполнения задания 1

Исследовать функцию $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 6y$ на экстремум.

Решение. Найдем стационарные точки функции. Для этого вычислим частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 2x + 2y + 2 = 0 \\ z'_y &= 2x - 6y - 6 = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -2 \\ x - 3y &= 3 \end{aligned}\right\},$$

имеем $x = -\dfrac{3}{4}, \quad y = -\dfrac{5}{4}$.

Следовательно, $M_0\left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{5}{4}\right)$ – стационарная точка.

Находим вторые частные производные:

$z''_{xx} = 2, \qquad z''_{xy} = 2, \qquad z''_{yy} = -6$.

Составляем матрицу Гессе:

$$H(M_0) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -16 < 0$, то согласно критерию Сильвестра матрица Гессе знаконеопределена, а значит экстремума в точке M_0 нет.

Задание 2

Найти условные экстремумы функции $z = f(x, y)$ при заданном уравнении связи $F(x, y) = 0$.

1.	$z = xy$,	$x + y - 1 = 0$
2.	$z = 2x^2 + y^2$,	$3x + 2y - 6 = 0$
3.	$z = x^2 - y^2$,	$2x - y - 3 = 0$
4.	$z = xy^2$,	$x + 2y - 1 = 0$
5.	$z = x^2 y$,	$2x - y + 2 = 0$
6.	$z = 2xy$,	$x - 2y + 1 = 0$
7.	$z = x^2 + 2y^2$,	$2x + 3y - 4 = 0$
8.	$z = 3x^2 - y^2$,	$x - 2y + 1 = 0$
9.	$z = 4xy^2$,	$3x - y + 2 = 0$
10.	$z = 3x^2 y$,	$x + 2y + 3 = 0$
11.	$z = 3xy$,	$x - y + 3 = 0$

12. $z = x^2 + 3y^2$, $x + 2y - 4 = 0$

13. $z = 3x^2 - y^2$, $2x - 3y + 6 = 0$

14. $z = 4xy^2$, $x + 2y - 3 = 0$

15. $z = 3x^2 y$, $2x - y + 3 = 0$

16. $z = 3xy$, $x + 2y - 3 = 0$

17. $z = 5x^2 + y^2$, $2x - y + 4 = 0$

18. $z = x^2 - 3y^2$, $x - 2y + 1 = 0$

19. $z = 5xy^2$, $2x + 3y - 5 = 0$

20. $z = 3x^2 y$, $x - 2y + 3 = 0$

21. $z = 5xy$, $3x - 2y - 1 = 0$

22. $z = x^2 + y^2$, $2x - 4y + 5 = 0$

23. $z = 2x^2 - y^2$, $x - y + 5 = 0$

24. $z = 7x^2 y$, $y - x + 4 = 0$

25. $z = 6xy^2$, $2y - x + 1 = 0$

26. $z = 4xy$, $3x + 2y + 1 = 0$

27. $z = x^2 + 5y^2$, $y - 3x + 2 = 0$

28. $z = y^2 - 3x^2$, $2y - 3x + 6 = 0$

29. $z = 6x^2 y$, $3y - 2x + 2 = 0$

30. $z = 7xy^2$, $x + y + 3 = 0$

31. $z = xy$, $x - y - 2 = 0$

32. $z = 3x^2 + 2y^2$, $y - x + 3 = 0$

33. $z = 2y^2 - 3x^2$, $x - 2y - 3 = 0$

34. $z = xy^2$, $y - 2x - 3 = 0$.

Пример выполнения задания 2

Найти условные экстремумы функции $z = 5x^2 y$ при заданном уравнении связи $2x + y - 3 = 0$.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи.

I способ. Уравнение связи позволяет выразить переменную y через переменную x: $y = 3 - 2x$.

Подставим полученную зависимость в функцию, получим функцию одной переменной x:

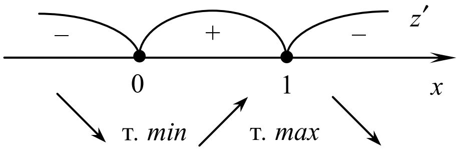
$$z = 5x^2(3 - 2x) = 15x^2 - 10x^3 .$$

Таким образом, задача поиска увловного экстремума функции двух переменных свелась к задаче поиска экстремума функции одной переменной. Найдем стационарные точки функции (необходимое условие экстремума):

$$\begin{aligned} &z' = 30x - 30x^2 = 30x(1 - x), \\ &30x(1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \end{aligned}.$$

Соответственно: $y_1 = 3, \quad y_2 = 1$.

Проверим смену знака производной через стационарные точки (достаточные условия экстремума):



Таким образом,

$$\begin{aligned} &z_{\min}(0;\ 3) = 0 \\ &z_{\max}(1;\ 1) = 5 \end{aligned}.$$

II способ. В общем случае для решения задачи на условный экстремум составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda F(x,\ y),$$

где λ – множитель Лагранжа. В нашей задаче

$$L(x,\ y,\ \lambda)=5x^2y+\lambda(2x+y-3).$$

Решаем задачу поиска экстремума функции Лагранжа. В этом случае необходимые условия имеют вид:

$$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ F(x,\ y)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10xy+2\lambda=0 \\ 5x^2+\lambda=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения имеем: $\lambda=-5x^2$.

Тогда: $10xy-10x^2=0,\quad x(y-x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$ или $y=x$.

Пусть $x=0$, тогда $y=3$, имеем стационарную точку $M_1(0;\ 3)$.

Пусть $y=x$, тогда $2x+x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=1,\quad y=1$.

Имеем стационарную точку $M_2(1;\ 1)$.

Для выяснения вопроса о наличии экстремума в полученных стационарных точках составим определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y \\ f'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ f'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Для этого вычислим частные производные:

$$f'_x=10xy,\quad f'_y=5x^2,\ L''_{xx}=10y,\quad L''_{xy}=L''_{yx}=10x,\quad L''_{yy}=0.$$

Тогда:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 10xy & 5x^2 \\ 10xy & 10y & 10x \\ 5x^2 & 10x & 0 \end{vmatrix}.$$

В точке $M_1(0;\ 3)$: $\quad \Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

Достаточное условие не позволяет выяснить вопрос о наличии экстремума в точке M_1.

$$\text{В точке } M_2(1;\,1): \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} > 0 .$$

Следовательно, в точке M_2 – условный максимум.

Задание 3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;\ y)$ в области D, ограниченной заданными линиями (см. табл. 6).

Таблица 6

№ вариант	Функция $z = f(x;\ y)$	Область D
1	$z = x^3 + 33xy^2 - 108x + 165y^2$	$3x + y = 48,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
2	$z = x^3 + 15xy^2 - 27x - 30y^2$	$3x + y = 27,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
3	$z = x^3 + 63xy^2 - 75x + 126y^2$	$2x + y = 38,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
4	$z = x^3 + 60xy^2 - 108x - 240y^2$	$2x + y = 20,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
5	$z = x^3 + 99xy^2 - 147x - 396y^2$	$2x + y = 26,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
6	$z = x^3 + 36xy^2 - 48x + 72y^2$	$2x + y = 32,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
7	$z = x^3 + 33xy^2 - 108x - 165y^2$	$3x + y = 24,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
8	$z = x^3 + 72xy^2 - 75x - 72y^2$	$2x + y = 26,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
9	$z = x^3 + 21xy^2 - 48x + 63y^2$	$2x + y = 36,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
10	$z = x^3 + 27xy^2 - 75x + 108y^2$	$2x + y = 46,\ \ x = 0,\ \ y = 0$

Продолжение табл. 6

№ вариант	Функция $z=f(x;\ y)$	Область D
11	$z=x^3+48xy^2-75x-144y^2$	$3x+y=27,\ \ x=0,\ \ y=0$
12	$z=x^3+21xy^2-48x-63y^2$	$3x+y=18,\ \ x=0,\ \ y=0$
13	$z=x^3+63xy^2-75x-126y^2$	$2x+y=22,\ \ x=0,\ \ y=0$
14	$z=x^3+96xy^2-108x+192y^2$	$x+y=22,\ \ x=0,\ \ y=0$
15	$z=x^3+99xy^2-147x+396y^2$	$x+y=29,\ \ x=0,\ \ y=0$
16	$z=x^3+81xy^2-108x-243y^2$	$2x+y=24,\ \ x=0,\ \ y=0$
17	$z=x^3+45xy^2-48x-45y^2$	$2x+y=20,\ \ x=0,\ \ y=0$
18	$z=x^3+60xy^2-108x+240y^2$	$x+y=26,\ \ x=0,\ \ y=0$
19	$z=x^3+24xy^2-27x-24y^2$	$3x+y=33,\ \ x=0,\ \ y=0$
20	$z=x^3+15xy^2-27x+30y^2$	$2x+y=22,\ \ x=0,\ \ y=0$
21	$z=x^3+105xy^2-108x-105y^2$	$2x+y=32,\ \ x=0,\ \ y=0$
22	$z=x^3+27xy^2-75x-108y^2$	$3x+y=21,\ \ x=0,\ \ y=0$
23	$z=x^3+45xy^2-48x+45y^2$	$2x+y=28,\ \ x=0,\ \ y=0$
24	$z=x^3+96xy^2-108x-192y^2$	$2x+y=28,\ \ x=0,\ \ y=0$
25	$z=x^3+72xy^2-75x+72y^2$	$2x+y=34,\ \ x=0,\ \ y=0$
26	$z=x^3+36xy^2-48x-72y^2$	$3x+y=24,\ \ x=0,\ \ y=0$
27	$z=x^3+9xy^2-12x-9y^2$	$3x+y=12,\ \ x=0,\ \ y=0$
28	$z=x^3+108xy^2-192x-324y^2$	$x+y=20,\ \ x=0,\ \ y=0$
29	$z=x^3+135xy^2-147x-270y^2$	$2x+y=34,\ \ x=0,\ \ y=0$
30	$z=x^3+48xy^2-75x+144y^2$	$2x+y=42,\ \ x=0,\ \ y=0$

Окончание табл. 6

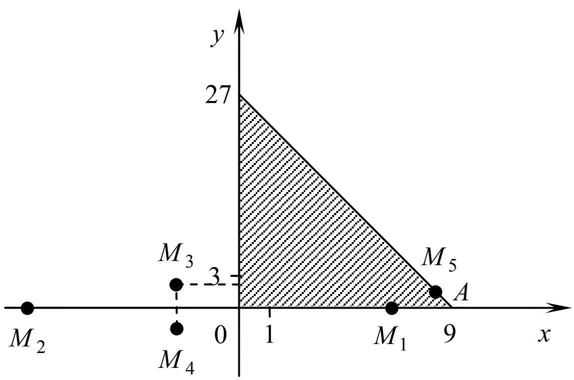
№ вариант	Функция $z = f(x;\ y)$	Область D
31	$z = x^3 + 24xy^2 - 27x + 24y^2$	$2x + y = 22, \quad x = 0, \ y = 0$
32	$z = x^3 + 12xy^2 - 12x - 12y^2$	$x + y = 13, \quad x = 0, \ y = 0$
33	$z = x^3 + 21xy^2 - 192x + 63y^2$	$3x + y = 12, \quad x = 0, \ y = 0$
34	$z = x^3 + 36xy^2 - 48x - 108y^2$	$2x + y = 12, \quad x = 0, \ y = 0$

Пример выполнения задания 3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;\ y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:

$$z = x^3 + 33xy^2 - 147x + 66y^2, \quad 3x + y = 27, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Решение. Область, ограниченная прямой $3x + y = 27$ и осями координат $x = 0$ и $y = 0$ изображена на рисунке.



Найдем стационарные точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 33y^2 - 147 = 0 \\ z'_y = 66xy + 132y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + 11y^2 = 49 \\ y(x+2) = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения $y = 0$ или $x = -2$.

При $y = 0$, $x = \pm 7$; при $x = -2$, $y = \pm\sqrt{\frac{45}{11}}$.

Таким образом, имеем четыре стационарные точки:

$$M_1(7;\ 0),\ M_2(-7;\ 0),\ M_3\left(-2;\ \sqrt{\frac{45}{11}}\right),\ M_4\left(-2;\ -\sqrt{\frac{45}{11}}\right).$$

Из них в рассматриваемую область попадает точка M_1. В этой точке значение функции $z_{M_1} = -686$.

Найдем точки возможного экстремума на границах области. На границе OA $y = 0$, тогда $z = x^3 - 147x,\ \ z' = 3x^2 - 147 = 3\left(x^2 - 49\right) = 0$.

Стационарные точки $(7;\ 0),\ (-7;\ 0)$ совпадают с найдеными ранее.

На границе OB $x = 0$, тогда $z = 66y^2,\ \ z' = 132y = 0$. Стационарная точка $O(0;\ 0)$ попадает в рассматриваемую область, значение функции в этой точке $z_0 = 0$.

На границе AB $3x + y = 27$ или $y = 27 - 3x$, тогда

$$z = x^3 + 33x(27-3x)^2 - 147x + 66(27-3x)^2,$$

$$z' = 3x^2 + 33(27-3x)^2 + 66x(27-3x) - 147 + 132(27-3x) = 0,$$

$$x^2 + 11\left(729 - 162x + 9x^2\right) + 22x(27-3x) - 147 + 132(27-3x) = 0,$$

$$x^2 + 8019 - 1782x + 99x^2 + 594x - 66x^2 - 147 + 3564 - 396x = 0,$$

$$34x^2 - 1584x + 11436 = 0,$$

$$17x^2 - 792x + 5718 = 0,$$

$$x_1 \approx 37{,}65, \quad x_2 \approx 8{,}93.$$

Имеем точку, попадающую в рассматриваемую область $M_5(8{,}93;\ 0{,}21)$. Значение функции в этой точке $z_{M_5} \approx -584{,}68$.

Вычислим значения функции в точках пересечения границ:
$z_A(9;\ 0) = -594, \quad z_B(0;\ 27) = 48114$.

Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее: $z = -686$ и наибольшее $z = 48114$

4.4. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Задание 1

Написать уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, и изменить порядок интегрирования.

1. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$$

2. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$$

3. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

4. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

5. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy$$

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{0} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx$

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy$

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx$

13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)\,dy$

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$

17. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

18. $\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

19. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$

20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$

21. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

22. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$

23. $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$

24. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_y^0 f(x,y)dx$

25. $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$

26. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

27. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)\,dy$

28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$

29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,dy$

31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

32. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_0^{x+2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$

33. $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

34. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\operatorname{tg} x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\operatorname{ctg} x} f(x,y)\,dy$.

Пример выполнения задания 1

Написать уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, и изменить порядок интегрирования

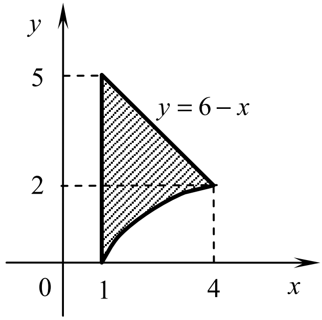
$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_1^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^5 dy \int\limits_1^{6-y} f(x,y)\,dx .$$

Решение. Линии ограничивающие область:

если $y \in [0;\, 2]$, то $1 \le x \le 2^y$;

если $y \in [2;\, 5]$, то $1 \le x \le 6-y$.

Сделаем рисунок.



Так как $1 \le x \le 2^y$, то $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge \log_2 x \end{cases}$ при $0 \le y \le 2$.

Так как $1 \le x \le 6 - y$, то $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \le 6 - x \end{cases}$ при $2 \le y \le 5$.

Изменив порядок интегрирования получим: $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\log_2 x}^{6-x} f(x;\ y)dy$.

Ответ: $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\log_2 x}^{6-x} f(x;\ y)dy$.

Задание 2

Вычислить двойной интеграл по области s, ограниченной заданными линиями.

1. $\iint\limits_s \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\quad s:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$

2. $\iint\limits_s \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\quad s:\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$

3. $\iint\limits_s \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\quad s:\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$

4. $\iint\limits_s \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\quad s:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

5. $\iint\limits_{s}\left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

6. $\iint\limits_{s}\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy;.$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

7. $\iint\limits_{s}\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

8. $\iint\limits_{s}\left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dx\,dy;.$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

9. $\iint\limits_{s}\left(4xy+3x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

10. $\iint\limits_{s}\left(12xy+9x^2y^2\right)dx\,dy;.$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

11. $\iint\limits_{s}\left(8xy+9x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

12. $\iint\limits_{s}\left(24xy+18x^2y^2\right)dx\,dy;.$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

13. $\iint\limits_{s}\left(12xy+27x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$

14. $\iint\limits_{s}\left(8xy+18x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

15. $\iint\limits_{s}\left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

16. $\iint\limits_{s}\left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

17. $\iint\limits_{s}\left(24xy-48x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

18. $\iint\limits_{s}\left(6xy+24x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

19. $\iint\limits_{s}\left(4xy+16x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

20. $\iint\limits_s \left(4xy+16x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

21. $\iint\limits_s \left(44xy+16x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

22. $\iint\limits_s \left(4xy+176x^3y^3\right)dx\,dy;\,.$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

23. $\iint\limits_s \left(xy-4x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

24. $\iint\limits_s \left(4xy+176x^3y^3\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

25. $\iint\limits_s \left(6x^2y^2+\dfrac{25}{3}x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

26. $\iint\limits_s \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

27. $\iint\limits_s \left(3x^2y^2+\dfrac{50}{3}x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

28. $\iint\limits_s \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

29. $\iint\limits_s \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

30. $\iint\limits_s \left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

31. $\iint\limits_s \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

32. $\iint\limits_s \left(x^2y^2-25x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

33. $\iint\limits_s \left(x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ y=x^2,\ y=\sqrt{x}$

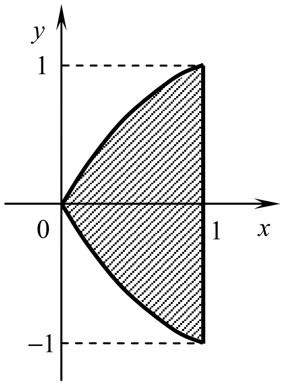
34. $\iint\limits_s \left(54x^2y^2-150x^4y^4\right)dx\,dy;$ $\qquad s:\ y=x^2,\ y=-x^2,\ x=1\,.$

Пример выполнения задания 2

Вычислить двойной интеграл по области s, ограниченной заданными линиями:

$$\iint_s \left(xy^2 + 9x^5y^5\right) dx\,dy; \quad s: \; y = \sqrt[3]{x}, \; y = -\sqrt[3]{x}, \; x = 1.$$

Решение. Сделаем рисунок области s.



$$\iint_s \left(xy^2 + 9x^5y^5\right) dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} \left(xy^2 + 9x^5y^5\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{xy^3}{3} + \frac{9x^5y^6}{6}\right)\Bigg|_{-\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2 dx = \frac{2}{9}x^3 \Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{9}$.

Задание 3

Вычислить двойной интеграл по заданной области.

1. $\iint\limits_s y\cdot e^{xy/2}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4$

2. $\iint\limits_s y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$

3. $\iint\limits_s y\cos xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$

4. $\iint\limits_s y^2\cdot e^{-xy/4}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=2,\ y=x$

5. $\iint\limits_s y\sin xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$

6. $\iint\limits_s y^2\cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2}$

7. $\iint\limits_s 4y\cdot e^{2xy}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$

8. $\iint\limits_s 4y^2\sin xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x$

9. $\iint\limits_s y\cos 2xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$

10. $\iint\limits_s y^2\cdot e^{-\frac{xy}{8}}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}$

11. $\iint\limits_s 12y\cdot\sin 2xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3$

12. $\iint\limits_s y^2\cos xy\,dx\,dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x$

13. $\iint\limits_s y\cdot e^{xy/4}\,dx\,dy;$ $\quad s:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8$

14. $\iint\limits_s 4y^2 \sin 2xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x$

15. $\iint\limits_s 2y \cos 2xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2$

16. $\iint\limits_s y^2 \cdot e^{-xy/2}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x$

17. $\iint\limits_s y \sin xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$

18. $\iint\limits_s y^2 \cos 2xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2}$

19. $\iint\limits_s 8y \cdot e^{4xy}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{2}$

20. $\iint\limits_s 3y^2 \sin \frac{xy}{2}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\ y=\frac{2x}{3}$

21. $\iint\limits_s y \cos xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\pi,\ y=3\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$

22. $\iint\limits_s y^2 \cdot e^{-xy/2}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=1,\ y=\frac{x}{2}$

23. $\iint\limits_s y \sin 2xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=2$

24. $\iint\limits_s y^2 \cos xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x$

25. $\iint\limits_s 6y \cdot e^{xy/3}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6$

26. $\iint\limits_s y^2 \sin \frac{xy}{2}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x$

27. $\iint\limits_s y \cos 2xy\, dx\, dy;$ $\quad s:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=2$

28. $\iint\limits_s y^2 \cdot e^{-xy/8}\, dx\, dy;$ $\quad s:\ x=0,\ y=4,\ y=2x$

29. $\iint\limits_s 3y\sin xy\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ y=\dfrac{\pi}{2},\ \ y=3\pi,\ \ x=1,\ \ x=3$

30. $\iint\limits_s y^2\cos\dfrac{xy}{2}\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=0,\ \ y=\sqrt{2\pi},\ \ y=x$

31. $\iint\limits_s 12y\cdot e^{6xy}\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ y=\ln 3,\ \ y=\ln 4,\ \ x=\dfrac{1}{6},\ \ x=\dfrac{1}{3}$

32. $\iint\limits_s y^2\sin xy\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=0,\ \ y=\sqrt{2\pi},\ \ y=2x$

33. $\iint\limits_s x\cos xy\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ y=\dfrac{1}{2},\ \ y=1,\ \ x=3\pi,\ \ x=\pi$

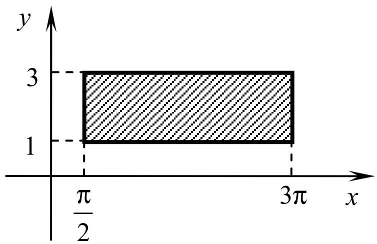
34. $\iint\limits_s x^2\cos xy\,dx\,dy;$ $\qquad s:\ x=0,\ \ x=\sqrt{\pi},\ \ y=\dfrac{1}{2}x$.

Пример выполнения задания 3

Вычислить двойной интеграл по заданной области.

$$\iint\limits_s 6x\sin xy\,dx\,dy; \quad s:\ y=1,\ \ y=3,\ \ x=\frac{\pi}{2},\ \ x=3\pi .$$

Решение. Сделаем рисунок области s .



$$\iint\limits_s 6x\sin(xy)\,dx\,dy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi}dx\int\limits_1^3 6x\sin(xy)\,dy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi}6x\frac{1}{x}\left(-\cos(xy)\right)\Big|_1^3\,dx=$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \left(-6\cos 3x + 6\cos x\right)dx = -2\sin 3x + 6\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} = 0 - \left(+2+6\right) = -8.$$

Ответ: -8.

Задание 4

С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $x = 8 - y^2, \quad x = 2y$

2. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2x}, \quad x = 16$

3. $x = 5 - y^2, \quad x = -4y$

4. $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}, \quad y = \dfrac{3}{2x}, \quad x = 9$

5. $y = 20 - x^2, \quad y = -8x$

6. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x$

7. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{3}{x}, \quad x = 4$

8. $y = \sqrt{x}, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 16$

9. $x = 27 - y^2, \quad x = -6y$

10. $y = 24 - x^2, \quad y = 5x$

11. $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}, \quad y = \dfrac{3}{2x}, \quad x = 4$

12. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{3}{x}, \quad x = 9$

13. $y = 11 - x^2, \quad y = -10x$

14. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 3e^x, \quad y = 1, \quad y = 3$

15. $y = \dfrac{3}{x}, \quad y = 4e^x, \quad y = 3, \quad y = 4$

16. $x = \sqrt{36 - y^2}, \quad x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$

17. $x^2 + y^2 = 72, \quad 6y = -x^2 \quad (y \le 0)$

18. $y = \dfrac{3}{x}, \quad y = 8e^x, \quad y = 3, \quad y = 8$

19. $x^2 + y^2 = 12, \quad -\sqrt{6}y = x^2 \quad (y \le 0)$

20. $y=\sqrt{12-x^2}$, $y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}$, $x=0$ $(x\ge 0)$

21. $y=\sqrt{24-x^2}$, $2\sqrt{3}y=x^2$, $x=0$ $(x\ge 0)$

22. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ $(x\ge 0)$

23. $y=\sqrt{18-x^2}$, $y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$

24. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=5e^x$, $y=2$, $y=5$

25. $x^2+y^2=36$, $3\sqrt{2}y=x^2$ $(y\ge 0)$

26. $y=6-\sqrt{36-x^2}$, $y=\sqrt{36-x^2}$, $x=0$ $(x\ge 0)$

27. $x=\sqrt{72-y^2}$, $6x=y^2$, $y=0$ $(y\ge 0)$

28. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=7$

29. $y=\sqrt{6-x^2}$, $y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$

30. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ $(x\le 0)$

31. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$

32. $x^2+y^2=12$, $\sqrt{6}x=y^2$ $(x\ge 0)$

33. $x^2+y^2=4$, $y=\sqrt{3}x$ $(y\ge 0)$

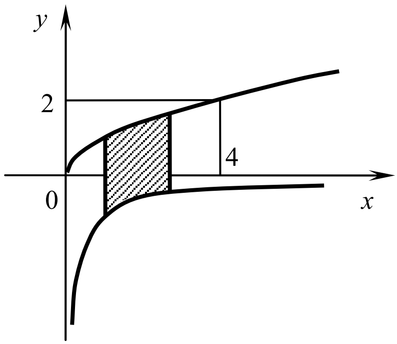
34. $y=e^x$, $x=\dfrac{1}{y}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $y=1$.

Пример выполнения задания 4

С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y=\sqrt{x},\quad y=-\frac{1}{x},\quad x=1,\quad x=e\,.$$

Решение. Сделаем рисунок:



$$S=\int_1^e dx\int_{-\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dy\,.$$

$$S=\int_1^e dx\int_{-\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dy=\int_1^e\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3+\ln\left(x\right)\Big|_1^e=\frac{2}{3}\left(\sqrt{e}\right)^3+1-\frac{2}{3}-0=\frac{2e\sqrt{e}+1}{3}$$

Ответ: $S=\dfrac{2e\sqrt{e}+1}{3}$.

Задание 5

При помощи двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями.

1. $y=16\sqrt{2x},\quad y=\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=2$

2. $y=5\sqrt{x}\ ,\quad y=\dfrac{5x}{3},\quad z=0,\quad z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}$

3. $x^2+y^2=2,\quad y=\sqrt{x},\quad y=0\,,\quad z=0,\quad z=15x$

4. $x - y = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 12y, \quad z = 0$

5. $x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = \frac{1}{2}$

6. $x = \frac{5\sqrt{y}}{2}, \quad x = \frac{5y}{6}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{6(3+\sqrt{y})}$

7. $x^2 + y^2 = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 30y$

8. $x + y = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad z = \frac{12x}{5}, \quad z = 0$

9. $y = 17\sqrt{2x}, \quad y = 2\sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad x + z = \frac{1}{2}$

10. $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, \quad y = \frac{5x}{9}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5\left(3+\sqrt{x}\right)}{9}$

11. $x^2 + y^2 = 8, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{15x}{11}$

12. $x - y = 4, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 3y, \quad z = 0$

13. $x = \frac{5\sqrt{y}}{6}, \quad x = \frac{5y}{18}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5\left(3+\sqrt{y}\right)}{18}$

14. $x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = 2$

15. $x^2 + y^2 = 8, \quad x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{30y}{11}$

16. $x + y = 4, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = \frac{3x}{5}, \quad z = 0$

17. $y = 6\sqrt{3x}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 0, \quad x + z = 3$

18. $y = \frac{5\sqrt{x}}{6}, \quad y = \frac{5x}{18}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5\left(3+\sqrt{x}\right)}{18}$

19. $x^2 + y^2 = 18, \quad y = \sqrt{3x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{5x}{11}$

20. $x - y = 6, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 4y, \quad z = 0$

21. $x = 7\sqrt{3y}\ ,\quad x = \sqrt{3y}\ ,\quad z = 0,\quad z + y = 3$

22. $x = \dfrac{5\sqrt{y}}{3},\quad x = \dfrac{5y}{9},\quad z = 0,\quad z = \dfrac{5\left(3 + \sqrt{y}\right)}{9}$

23. $x^2 + y^2 = 18,\quad x = \sqrt{3y},\quad x = 0\ ,\quad z = 0,\quad z = \dfrac{10y}{11}$

24. $x + y = 6\ ,\quad x = \sqrt{3y}\ ,\quad z = \dfrac{4x}{5},\quad z = 0$

25. $y = \sqrt{15x},\quad y = \sqrt{15}x\ ,\quad z = 0,\quad z = \sqrt{15}\left(1 + \sqrt{x}\right)$

26. $x^2 + y^2 = 50,\quad y = \sqrt{5x},\quad y = 0\ ,\quad z = 0,\quad z = \dfrac{3x}{11}$

27. $x - y = 8,\quad y = \sqrt{4x}\ ,\quad z = 3y,\quad z = 0$

28. $x = 16\sqrt{2y}\ ,\quad x = \sqrt{2y}\ ,\quad z + y = 2,\quad z = 0$

29. $x = 15\sqrt{y}\ ,\quad x = 15y\ ,\quad z = 0,\quad z = 15\left(1 + \sqrt{y}\right)$

30. $x^2 + y^2 = 50,\quad x = \sqrt{5y},\quad x = 0\ ,\quad z = \dfrac{6y}{11},\quad z = 0$

31. $x = 17\sqrt{2y}\ ,\quad x = 2\sqrt{2y}\ ,\quad z = 0,\quad z + y = \dfrac{1}{2}$

32. $y = 20\sqrt{2x},\quad y = 5\sqrt{2x},\quad z = 0,\quad z + y = \dfrac{1}{2}$

33. $x^2 + y^2 = 25,\quad x = y,\quad x \ge 0\ ,\quad z = 0,\quad z = \dfrac{5x}{6}$

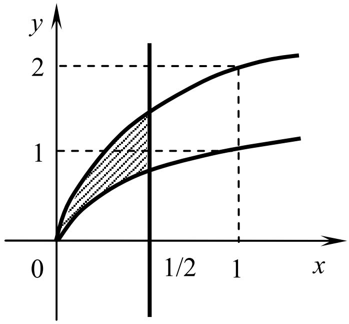
34. $x^2 + y^2 = 10,\quad x = \sqrt{5y},\quad x = 0\ ,\quad z = 0,\quad z = 2y\ .$

Пример выполнения задания 5

При помощи двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями.

$$y = \sqrt{x},\qquad y = 2\sqrt{x}\ ,\qquad z = 0,\quad z = \frac{1}{2} - x\ .$$

Решение. Сделаем проекцию данного тела на плоскость Oxy. Для этого построим кривые $y=\sqrt{x},\ \ y=2\sqrt{x}$ и прямую $x=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}-x=0\right)$.



$$V=\iint\limits_{s}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\,dy=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\left(-x+\frac{1}{2}\right)dy=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(-xy+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(-2\sqrt{x}\,x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(-x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{15\sqrt{2}}.$$

Ответ: $V=\frac{1}{15\sqrt{2}}$.

Задание 6

Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам.

1. $\iint\limits_{s} 4\left(x^2+y^2\right)dx\,dy;$

$s:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ x=0,\ y=0,\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

2. $\iint\limits_{s} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}};$

$s:\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

3. $\iint\limits_{s} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}};$

$s:\ y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ x=0,\quad y=\sqrt{3}x$

4. $\iint\limits_{s} 9\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-y+x^2=0,\ y^2-2y+x^2=0,\ x=0,\ y=0,\ (x\geq 0)$

5. $\iint\limits_{s} \frac{8x}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=0,\ y=x$

6. $\iint\limits_{s} \frac{4y}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$

7. $\iint\limits_{s} \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-y+x^2=0,\ y^2-2y+x^2=0,\ y=0,\ x=0,\ (x\geq 0)$

8. $\iint\limits_{s}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$s:\ x^2-8x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ \ x=0$

9. $\iint\limits_{s}\frac{2x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

$s:\ x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=0,\ \ x=0,\ \ (y\ge 0)$

10. $\iint\limits_{s}\frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$;

$s:\ y^2-y+x^2=0,\quad y^2-3y+x^2=0,\quad y=0,\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

11. $\iint\limits_{s}\frac{1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$;

$s:\ y^2-y+x^2=0,\quad y^2-7y+x^2=0,\quad y=0,\ \ x=0,\ \ (x\ge 0)$

12. $\iint\limits_{s}\frac{16y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$;

$s:\ x^2-3x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=0,\ \ y=\sqrt{3}x$

13. $\iint\limits_{s}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$;

$s:\ y^2-y+x^2=0,\quad y^2-7y+x^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ \ x=0$

14. $\iint\limits_{s}\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

$s:\ x^2-x+y^2=0,\quad x^2-3x+y^2=0,\quad y=x,\ \ x=0$

15. $\iint\limits_{s}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; x^2-x+y^2=0,\;\; x^2-5x+y^2=0,\;\; y=\sqrt{3}x,\;\; x=0$

16. $\iint\limits_{s}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; y^2-y+x^2=0,\;\; y^2-5y+x^2=0,\;\; y=0,\;\; x=0,\;\; (x\ge 0)$

17. $\iint\limits_{s}\frac{8}{11}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\; y^2-3y+x^2=0,\;\; y^2-6y+x^2=0,\;\; y=\sqrt{3}x,\;\; x=0$

18. $\iint\limits_{s}\frac{1-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; x^2-8x+y^2=0,\;\; x^2-10x+y^2=0,\;\; y=0,\;\; x\ge 0,\;\; (y\ge 0)$

19. $\iint\limits_{s}\frac{3-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; y^2-y+x^2=0,\;\; y^2-5y+x^2=0,\;\; y=0,\;\; x=0,\;\; (x\ge 0)$

20. $\iint\limits_{s}\frac{1-4x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; y^2-\sqrt{2}y+x^2=0,\;\; y^2-2\sqrt{2}y+x^2=0,\;\; y=0,\;\; y=x$

21. $\iint\limits_{s}\frac{1+6y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; x^2-x+y^2=0,\;\; x^2-2x+y^2=0,\;\; y=0,\;\; x=0,\;\; (y\ge 0)$

22. $\iint\limits_{s}\frac{y-2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy;$

$s:\; x^2-8x+y^2=0,\;\; x^2-10x+y^2=0,\;\; y=0,\;\; x=0,\;\; (y\ge 0)$

23. $\iint\limits_{s} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-2y+x^2=0,\ \ y^2-10y+x^2=0,\ \ y=0,\ \ y=x$

24. $\iint\limits_{s} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-x+y^2=0,\ \ x^2-9x+y^2=0,\ \ y=0,\ \ y=x$

25. $\iint\limits_{s} \frac{8xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-x+y^2=0,\ \ x^2-7x+y^2=0,\ \ y=0,\ \ y=\sqrt{3}x$

26. $\iint\limits_{s} \frac{32xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-3x+y^2=0,\ \ x^2-9x+y^2=0,\ \ y=\sqrt{3}x,\ \ x=0$

27. $\iint\limits_{s} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-y+x^2=0,\ \ y^2-5y+x^2=0,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ (x\geq 0)$

28. $\iint\limits_{s} \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-3y+x^2=0,\ \ y^2-6y+x^2=0,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ (x\geq 0)$

29. $\iint\limits_{s} \frac{8(x-y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-2x+y^2=0,\ \ x^2-4x+y^2=0,\ \ y=0,\ \ y=x$

30. $\iint\limits_{s} \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-y+x^2=0,\ \ y^2-25y+x^2=0,\ \ y=0,\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

31. $\iint\limits_s \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-4x+y^2=0,\ \ x^2-10x+y^2=0,\ \ y=0,\ x=0,\ (y\ge 0)$

32. $\iint\limits_s \frac{8xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ y^2-y+x^2=0,\ \ y^2-25y+x^2=0,\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0$

33. $\iint\limits_s \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-2x+y^2=0,\ \ x^2-4x+y^2=0,\ \ y=x,\ y=\sqrt{3}x$

34. $\iint\limits_s \frac{2xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,dx\,dy;$

$s:\ x^2-2y+y^2=0,\ \ x^2-4y+y^2=0,\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x\,.$

Пример выполнения задания 6

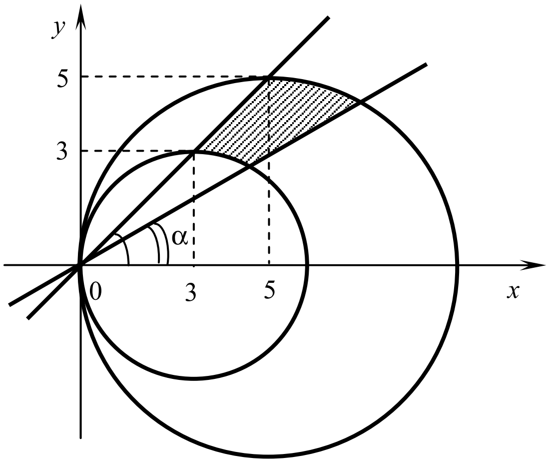
Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$\iint\limits_s \frac{4xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,dx\,dy$$

$$s:\ x^2-6x+y^2=0\quad x^2-10x+y^2=0\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=x\,.$$

Решение.

Сделаем рисунок области $S:\ (x-3)^2+y^2=9\ \ (x-5)^2+y^2=25\,.$



Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \qquad y = x\,.$$

Якобиан преобразования $I = r$. Найдем новые пределы интегрирования:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \varphi = \frac{\pi}{6};\ \ \mathrm{tg}\varphi = 1,\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Подставляя замену в уравнение окружности, получим:

$$r^2\cos^2\varphi - 6r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0$$

$$r^2 - 6r\cos\varphi = 0$$

$$r = 0,\quad r = 6\cos\varphi\,.$$

$$r^2\cos^2\varphi - 10r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0$$

$$r = 0,\quad r = 10\cos\varphi$$

$$\iint\limits_{s}\frac{4xy\,dx\,dy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} = \iint\limits_{D}\frac{4r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}\,r\,d\varphi\,dr = \iint\limits_{D}2\sin 2\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi} 2\sin 2\varphi \, dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\sin 2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Задание 7

Пластинка s задана ограничивающими ее кривыми, $\rho = \rho(x, y)$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $\rho = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

2. $\rho = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

3. $\rho = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=16,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

4. $\rho = \dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=9,\quad x^2+y^2=16,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

5. $\rho = \dfrac{x+4y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=16,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0).$

6. $\rho = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

7. $\rho = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

8. $\rho = \dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\le 0)$.

9. $\rho = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=9,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

10. $\rho = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

11. $\rho = \dfrac{3x+y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=9,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

12. $\rho = \dfrac{2y-x}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=9,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\le 0,\ y\ge 0)$.

13. $\rho = \dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$;

$s:\quad x^2+y^2=16,\quad x^2+y^2=25,\quad x=0,\quad y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

14. $\rho = \dfrac{2y-3x}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\le 0, \ y\ge 0).$

15. $\rho=\dfrac{3x+y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\le 0).$

16. $\rho=\dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\le 0, \ y\ge 0).$

17. $\rho=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\ge 0).$

18. $\rho=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\ge 0).$

19. $\rho=\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\le 0).$

20. $\rho=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\ge 0).$

21. $\rho=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=25, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\le 0, \ y\ge 0).$

22. $\rho=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\ge 0, \ y\le 0).$

23. $\rho = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \le 0, \ y \ge 0)$.

24. $\rho = \dfrac{x - 4y}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \ge 0, \ y \le 0)$.

25. $\rho = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \ge 0, \ y \le 0)$.

26. $\rho = \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 16, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \ge 0, \ y \le 0)$.

27. $\rho = \dfrac{y + 3x}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 16, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \ge 0, \ y \le 0)$.

28. $\rho = \dfrac{y - 4x}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \le 0, \ y \ge 0)$.

29 $\rho = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \ge 0, \ y \ge 0)$.

30. $\rho = \dfrac{y - 2x}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \le 0, \ y \ge 0)$.

31. $\rho = \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2}$;

$s: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (x \ge 0, \quad y \ge 0)$.

32. $\rho = \dfrac{y+3x}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16 \quad (x \ge 0,\ y \le 0)$.

33. $\rho = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$s: \quad x^2+y^2=16, \quad x^2+y^2=36 \quad (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

34. $\rho = \dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$;

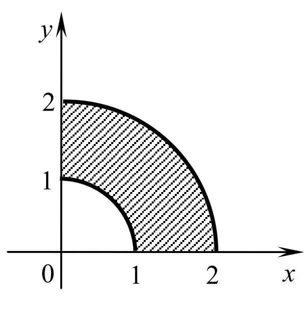
$s: \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16 \quad (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

Пример выполнения задания 7

Пластинка s задана ограничивающими ее кривыми, $\rho = \rho(x,\ y)$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$$\rho = \frac{x+2y}{x^2+y^2} \quad s: \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4 \quad (x \ge 0,\ y \ge 0).$$

Решение. Для того, чтобы найти массу пластинки необходимо вычислить интеграл: $m = \iint\limits_{s} \rho(x;\ y)\,dx\,dy$. Сделаем рисунок области S:



Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \text{где } \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \; r \in [1; 2].$$

$$m = \iint\limits_D \frac{r\cos\varphi + 2r\sin\varphi}{r^2} r\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,dr = 3 .$$

Ответ: $m = 3$.

Задание 8

Вычислить тройной интеграл по области, ограниченной заданными поверхностями.

1. $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$;

$T: \quad y = 10x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = xy, \quad z = 0.$

2. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{8}\right)^4}$;

$T: \quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{8} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

3. $\iiint\limits_T 15\left(y^2 + z^2\right)dx\,dy\,dz$;

$T: \quad z = x + y, \quad y + x = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

4. $\iiint\limits_T (3x + 4y)\,dx\,dy\,dz$;

$T: \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = 5\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 0.$

5. $\iiint\limits_T \left(1 + 2x^3\right)dx\,dy\,dz$;

$T: \quad y = 9x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = \sqrt{xy}, \quad z = 0.$

6. $\iiint\limits_T \left(27+54y^3\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

7. $\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=15x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=xy, \quad z=0.$

8. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^5};$

$T: \quad \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

9. $\iiint\limits_T \left(3x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=10y, \quad y+x=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

10. $\iiint\limits_T (15x+30z)\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=x^2+3y^2, \quad z=0, \quad y=x, \quad y=0, \quad x=8.$

11. $\iiint\limits_T \left(4+8z^3\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

12. $\iiint\limits_T \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=36x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

13. $\iiint\limits_T 21xz\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=2, \quad z=xy, \quad z=0.$

14. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6};$

$T: \quad \frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

15. $\iiint\limits_T \left(x^2+3y^2\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=10x, \quad y+x=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

16. $\iiint\limits_T (60y+90z)\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0.$

17. $\iiint\limits_T \left(\frac{10x}{3}+\frac{5}{3}\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=9x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

18. $\iiint\limits_T (9+18z)\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=4x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

19. $\iiint\limits_T 3y^2\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=2x, \quad y=0, \quad x=2, \quad z=xy, \quad z=0.$

20. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^4};$

$T: \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

21. $\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=10x(x+3y), \quad y+x=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

22. $\iiint\limits_T (8y+12z)\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=3x^2+2y^2, \quad z=0.$

23. $\iiint\limits_T 63\left(1+\sqrt{2y}\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$

24. $\iiint\limits_T (x+y)\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=30x^2+60y^2, \quad z=0.$

25. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5};$

$T: \quad \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

26. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=2, \quad z=xy, \quad z=0.$

27. $\iiint\limits_T y^2\,dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=10x(3x+y), \quad y+x=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

28. $\iiint\limits_T \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=x^2+15y^2, \quad z=0.$

29. $\iiint\limits_T \left(x^2+4y^2\right)dx\,dy\,dz;$

$T: \quad z=20(2x+y), \quad x+y=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

30. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6};$

$T: \quad \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

31. $\iiint\limits_T x^2 z\,dx\,dy\,dz;$

$T:\quad y=3x,\quad y=0,\quad x=2,\quad z=xy,\quad z=0.$

32. $\iiint\limits_T z^3 dx\,dy\,dz;$

$T:\quad y=3x,\quad y=0,\quad x=2,\quad z=\sqrt{xy},\quad z=0.$

33. $\iiint\limits_T z^2 x\,dx\,dy\,dz;$

$T:\quad y=x,\quad y=0,\quad x=2,\quad z=xy.$

34. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz;$

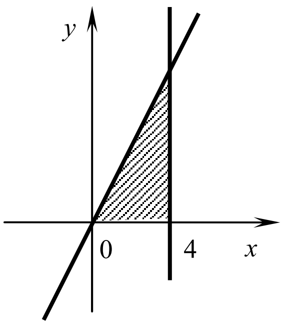
$T:\quad y=4x,\quad y=0,\quad x=3,\quad z=\sqrt{xy}.$

Пример выполнения задания 8

Вычислить тройной интеграл по области, ограниченной заданными поверхностями.

$$\iiint\limits_T xz\,dx\,dy\,dz;\quad T:\quad y=2x,\quad y=0,\quad x=4,\quad z=\sqrt{xy}.$$

Решение. Сделаем рисунок области на плоскости xOy.



$$\iiint\limits_T xz\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} xz\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{2x} \frac{1}{2} x^2 y\,dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 \frac{1}{2} x^2 \cdot 4x^2\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 x^4\,dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^4 = \frac{1024}{5}.$$

Ответ: $\frac{1024}{5}$.

ТЕМА 5

РЯДЫ

5.1. Числовые ряды

Задание 1

Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаками сравнения.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,5^{n}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{2}+1}}{n^{3}+1}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}+3}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^{2}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^{4}}\,\sqrt[4]{n+1}}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\sin\frac{\pi}{4^{n}}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+4}{(n^{2}+2)2^{n}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}-n^{2}}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n^{2}}}{1+n^{4}}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^{3}}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2} n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+3n}{2+3n^{2}}\right)^{2}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 4^{n}-2}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin 2n}{n^{3}}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^{n}+n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\cos n}{3^{n}+\sin n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^{2}(n+1)^{2}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(2^n+1\right)^2}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n^5+2}}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{n^3+4}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)(n+2)}$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$ **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n)}{2n^2-1}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^3+5}$ **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+2}$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^2\sin^2 n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt[3]{n^2+2}}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}\,\ln n}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+2)\sqrt[5]{n^4+1}}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10n+5}{(n+4)^2\cdot n}$.

Пример выполнения задания 1

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8}{(n+2)^3\cdot 3^n}$ на сходимость, пользуясь признаками сравнения.

Решение.

$$a_n=\frac{n^3+8}{(n+2)^3\cdot 3^n}=\frac{n^3+8}{\left(n^3+6n^2+12n+8\right)\cdot 3^n}<\frac{n^3+8}{\left(n^3+8\right)\cdot 3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ является сходящимся, то по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

Задание 2

Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Даламбера.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)\,!}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^2+1\right)}{(n+1)\,!}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2n!}{(2n)\,!}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)\,!}{2^n(3n+5)}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+5)}{3^n\cdot n!}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^n\left(n^3+1\right)}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)\,!}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\,!}{n!}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}(n!)^3}{(3n)\,!}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)\,!}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)\,!5^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)\,!}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)\,!}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)\,!}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)\,!}{(2n)\,!}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n(n+2)\,!}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\;!}{\sqrt{2n+3}}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\,!}{10^n\cdot n^2}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)\,!}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)\,!}{(3n)\,!}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(2n)\,!}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdot 19\ldots(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\ldots n^3}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 10\cdot 16\ldots(6n-2)}{1^2\cdot 4^2\cdot 7^2\ldots(3n-2)^2}$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n+1)(2n)\,!}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n(n+1)\,!}$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{n!2^{n+1}}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n^2}{n+1}$.

Пример выполнения задания 2

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n(n+1)!}$ на сходимость, пользуясь признаком Даламбера.

Решение. $a_n=\frac{5^n}{7^n(n+1)!}$; $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}(n+2)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}(n+2)!}\cdot\frac{7^n(n+1)!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{7(n+2)}=0<1\,.$$

Таким образом, ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

Задание 3

Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Коши.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}\frac{1}{2^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4-\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{1}{5^n}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n^2}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n^n}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{n/2}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+4}\right)^{n^2}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{n^2}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n^2+1)^n}$ **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{n^2}$ **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{9n-4}\right)^{n^3}$.

Пример выполнения задания 3

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n+9}{5n-1}\right)^{-n^2}$ на сходимость, пользуясь признаком Коши.

Решение. $a_n = \left(\dfrac{10n+9}{5n-1}\right)^{-n^2}$; $a_n = \left(\dfrac{5n-1}{10n+9}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{10n+9}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{10n+9}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{10}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0<1.$$

Таким образом, ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

Задание 4

Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^2}}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+4}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9+4n^2}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-n}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{n^2}$ **9.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\left(\ln^2 n+1\right)n}$

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$ **11.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n\left(1+\ln^2 n\right)}$ **12.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\left(4+\ln^2 n\right)}$

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n\ln n}$ **15.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^3 n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{\left(1+n^2\right)^3}}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3}}$

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{\left(n^2-3\right)^3}}$ **20.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 x}}$ **21.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\ln n}}{n}$

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}}{n^2}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}3^{\frac{1}{n}}$

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^{\sqrt{n}}}$ **27.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4n+5}$ **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ **30.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$ **32.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-3)\ln(2n-3)}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(2n+1)(3n+2)}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Пример выполнения задания 4

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg} n}$ на сходимость, пользуясь интегральным признаком.

Решение. $a_n = \dfrac{1}{(n^2+1)\operatorname{arctg} n}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{d(\operatorname{arctg}x)}{\operatorname{arctg}x}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}\frac{d(\operatorname{arctg}x)}{\operatorname{arctg}x}=\lim_{a\to\infty}\ln|\operatorname{arctg}x|\Big|_1^a=$$

$$=\lim_{a\to\infty}(\ln|\operatorname{arctg}a|-\ln|\operatorname{arctg}1|)=\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{4}=\ln\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right)=\ln 2.$$

Таким образом, интеграл сходится, значит, ряд сходящийся.

Ответ: Ряд сходится.

Задание 5

Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n + n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n - 1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)2^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{2n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{3^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+4)^4}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n/3}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + 1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^4 + 1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\left(2n^2 + 7\right)^3}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{2^{n+2}(n+2)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln^2 n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(2+\cos n\pi\right)}{2n^2-1}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+3}-\left(n+3\right)^3}$ **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{7n^2+6n-1}\right)^{-n}$.

Пример выполнения задания 5

Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{2^{n+4}\left(n+1\right)^3}$ на сходимость.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения

$a_n=\frac{n^3+3}{2^{n+4}(n+1)^3}<\frac{n^3+3}{2^{n+4}\left(n^3+3\right)}=\frac{1}{2^{n+4}}$, пусть $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}$ – сходится. Следовательно, исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

Задание 6

Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n\left(n+1\right)}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n^2+1}{n^2}$ **3.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{n!}$ **5.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt[4]{n^5}}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{100}}$ **9.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[4]{n^4-1}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{3^n + 2}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^{n^2}}{3^n n^{n^2}}$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5}}{n-2}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{2n-1}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^2$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1+n}}$ **27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{3n^3 + 4}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{7^n}$ **29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^n}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{1000^n}$

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}}{n}$ **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 8 \cdot 27 \ldots n^3}{4 \cdot 10 \cdot 16 \ldots (6n-2)}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-5}\right)}$.

Пример выполнения задания 6

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{n+4}\right)^{n+7}$ на сходимость.

Решение. $a_n = \left(\frac{n-5}{n+4}\right)^{n+7}$. Вычислим предел a_n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{n+4}\right)^{n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4-9}{n+4}\right)^{n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-9}\cdot\frac{-9}{n+4}\cdot(n+7)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-9}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-9}} = e$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{-9n-63}{n+4}} = e^{-9} \neq 0$.

Необходимое условие сходимости ряда не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится.

Задание 7

Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)4^n}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{n^2-1}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n+\ln n}}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{7^n}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)}{7\cdot9\cdot11...(2n+5)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}\sqrt{(5n-1)^{3}}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^3}{(n+1)!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+2)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{(n+1)^3}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n^2-3}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\arcsin n}{\sqrt{1-n^2}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\mathrm{arctg}\,(n)\cdot(1+n^2)}$.

Пример выполнения задания 7

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}$ на абсолютную или условную сходимость.

Решение. $a_n=\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}$.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

$$a_n=\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}\geq a_{n+1}=\left(\frac{7n+22}{14n+13}\right)^{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} = 0 .$$

Таким образом, ряд сходится условно. Проверим его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}$.

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0 .$$

Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный знакопеременный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится абсолютно.

Задание 8

Вычислить сумму ряда с точностью δ .

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \quad \delta = 0{,}01.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \delta = 0{,}01.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \quad \delta = 0{,}001.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}, \quad \delta = 0{,}001.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad \delta = 0{,}01.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}, \quad \delta = 0{,}001.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2^n}, \quad \delta = 0{,}1.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}, \quad \delta = 0{,}1.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^n\, n!}, \quad \delta = 0{,}001.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!3^n}, \quad \delta = 0{,}001.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\cdot 2^n}, \quad \delta = 0{,}1.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)3^n}, \quad \delta = 0{,}001.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^{n+1}},\quad \delta=0{,}01.$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)},\quad \delta=0{,}01.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!},\quad \delta=0{,}001.$ **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2},\quad \delta=0{,}001.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!},\quad \delta=0{,}001.$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^2)^3},\quad \delta=0{,}001.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)2^{n+1}},\quad \delta=0{,}001.$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\quad \delta=0{,}001.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)2^{2n}},\quad \delta=0{,}001.$ **22.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)}{2^n\cdot n!},\quad \delta=0{,}001.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^n},\quad \delta=0{,}001.$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}n(n+1)},\quad \delta=0{,}001.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)},\quad \delta=0{,}001.$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n n!},\quad \delta=0{,}001.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n},\quad \delta=0{,}01.$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n(n+1)},\quad \delta=0{,}001.$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1},\quad \delta=0{,}01.$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n-1)},\quad \delta=0{,}01.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\quad \delta=0{,}001.$

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n!\,(2n)!},\quad \delta=0{,}001.$ **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n)!},\quad \delta=0{,}001.$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n(2n+1)},\quad \delta=0{,}01.$

Пример выполнения задания 8

Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(n+3)^n}$ с точностью $\delta = 0{,}01$.

Решение.

$$a_1 = -\frac{3}{4};\quad a_2 = \frac{9}{25};\quad a_3 = -\frac{27}{216};$$

$$a_4 = \frac{81}{2401};\quad a_5 = -\frac{243}{32768}\qquad |a_5| < \delta = 0{,}01$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(n+3)^n} \approx -\frac{3}{4}+\frac{9}{25}-\frac{27}{216}+\frac{81}{2401} \approx -0{,}4813.$$

5.2. Степенные ряды

Задание 1

Найти область сходимости функционального ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{3n}}{(n+1)5^n}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+2}}{3n+8}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-3}}{4^n(2n-1)}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-2}}{(2n^2-5n)4^n}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{n^2+1}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,9^n(x-1)^{2n}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,9^n}{(x-1)^n}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{(n+4)^2}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{x^n}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$ **26.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)(x-3)^{2n}}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\dfrac{2n-3}{2^n}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(x+5)^{2n+3}}{(n+1)!}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n(4n+3)}{3^n}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+4n)(x-1)^{2n}}{(n+2)^2\,2^n}$.

Пример выполнения задания 1

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6n+1)2^n}{(6n+3)(x+2)^n}.$$

Решение. $a_n = \dfrac{(6n+1)2^n}{(6n+3)}$.

Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(6n+1)2^n\cdot(6n+9)}{(6n+3)\cdot(6n+7)2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Найдем область сходимости $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{2}$ или: $\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} > -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Решая данную систему, получаем, что ряд сходится абсолютно, если $x \in (-\infty;\,-4)\cup(0;\,+\infty)$.

Исследуем сходимость на границах, т.е. при $x=-4,\quad x=0$.

Если $x=0$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6n+1)2^n}{(6n+3)2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6n+1}{6n+3}$

$$a_n = \frac{6n+1}{6n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{6n+3} = 1.$$

Необходимое условие не выполняется, следовательно, при $x=0$ ряд расходится.

Если $x=-4$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6n+1)2^n}{(6n+3)(-2)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{6n+1}{6n+3}$.

Воспользуемся признаком Лейбница:

1) $a_n = \dfrac{6n+1}{6n+3}$, $\quad a_1 > a_2 > a_3 \ldots$; $\quad$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{6n+3} = 1 \neq 0$.

Таким образом, ряд расходится, т.к. признак Лейбница не выполняется.

Ответ: Ряд сходится при $x \in (-\infty;\,-4)\cup(0;\,+\infty)$.

Задание 2

Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ **6.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n}$ **8.** $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ **9.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) x^n$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$ **12.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+4)\sqrt[3]{10^n}}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ **15.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$ **21.** $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (n^2+1) x^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n!}$ **23.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)2^n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ **26.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+2)}$ **27.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+2}}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ **29.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ **30.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$ **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\frac{x^n}{n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} 7^n\left(n^2+1\right)x^{2n}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{(n+1)!}$.

Пример выполнения задания 2

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\,(n+3)}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{3^n\,(n+3)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}\,(n+4)}$.

Найдем радиус $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+4)}{3^n(n+3)}\right| = 3$, тогда область сходимости: $-3 < x < 3$.

Исследуем сходимость на границах, т.е. при $x=-3$ и $x=3$.

Если $x=-3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\,(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$.

Воспользуемся признаком Лейбница:

$a_n = \frac{1}{n+3}$, $a_1 > a_2 > .....$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 0$.

По признаку Лейбница знакопеременный ряд сходится.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Данный ряд является расходящимся. Таким образом, ряд сходится условно.

Если $x=3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ – расходится.

Ответ: Ряд сходится при $x \in [-3;\,3)$.

Задание 3

Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+1)}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n+1)2^n}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x+2)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{n^2+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+10)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+4)^n}{n^3+1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n(x+1)^n}{n+1}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+1)!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n(x-3)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,9^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+1)}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n(x+2)^n}{(5n+4)^3}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n+4}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{(n+1)^2}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+1)2^n}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5n+2}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n(x-2)^n}{3^n}$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{(n+1)(n+2)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-6)^n}{(6n-4)^2}$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-5)^n}{n^3+1}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)(x+6)^n}{(n+1)(n+5)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)(x+3)^n}{2n+3}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3)(x-4)^n$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)(x-2)^n}{(n+1)^3}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2(x+4)^n}{3^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n(x-7)^n}{(n+2)(n+3)}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-7)^n}{(n^2+2)^2}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (x+2)^{2n}}{(n+4)^2}$.

Пример выполнения задания 3

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)(x+7)^{2n}}{(n+5)(n+6)}$.

Решение. $a_n = \frac{3^n (n+1)}{(n+5)(n+6)}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+2)}{(n+6)(n+7)}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n (n+1)(n+6)(n+7)}{3^{n+1}(n+2)(n+6)(n+5)}\right| = \frac{1}{3}.$$

Таким образом область в которой исходный ряд сходится определяется неравенством: $(x+7)^2 < \frac{1}{3}$.

Решим неравенство: $x \in \left(-7-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -7+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Исследуем сходимость на границах области, т.е. в точках

$x = -7 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = -7 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$x = -7 + \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)\left(-7-\frac{1}{\sqrt{3}}+7\right)^{2n}}{(n+5)(n+6)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+5)(n+6)}.$$

Воспользуемся интегральным признаком.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{(x+5)(x+6)}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A} \frac{x+5-4}{(x+5)(x+6)}dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\int_1^A \frac{1}{x+6}\,dx - 4\int_1^A \frac{1}{\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,dx\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\ln|x+6| - 16\ln\left|\frac{x+5}{x+6}\right|\right)\Bigg|_1^A =$$

$$\lim_{A\to\infty}\ln\frac{(x+6)^{17}}{(x+5)^{16}}\Bigg|_1^A = \lim_{A\to\infty}\ln\left(\frac{(A+6)^{17}}{(A+5)^{16}} - \ln\frac{7^{17}}{6^{16}}\right) = \infty.$$

Интеграл расходится, значит и ряд расходится.

При $x = -7 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)\left(-7+\frac{1}{\sqrt{3}}+7\right)^{2n}}{(n+5)(n+6)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+5)(n+6)}.$$

Аналогично можно доказать, что ряд расходится.

Ответ: область сходимости имеет вид $\left(-7-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -7+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задание 4

Найти сумму ряда, применяя интегрирование, и указать область сходимости.

1.	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$	**2.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,x^{n-1}$	**3.**	$\sum_{n=2}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$
4.	$\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^n$	**5.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n}$	**6.**	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$	**8.**	$\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{2n-1}$	**9.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n-1}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot nx^{2n-1}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (2n+1) x^{2n}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n-1}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{3^n}$ **14.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3n+2) x^{3n+1}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{3n-1}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-1) x^{3n-2}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1) x^{4n-3}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^{4n-1}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\, n\, x^{4n-1}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot n\, x^{3n-1}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^{3n-1}}{3^n}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n$ **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n(n+1) x^{n-1}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n (n+1) x^n$ **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\, n(n+1) x^{n-1}$

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)x^{n-1}}{3^n}$ **27.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{2^n}$

28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) x^{n+1}$ **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot 2^n\, x^{2n-1}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot 2^n\, x^{2n}$ **31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{2n-1}}{3^n}$

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{4n-1}}{4^n}$ **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{n+2}$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot nx^{2n+1}$.

Пример выполнения задания 4

Найти сумму ряда, применяя интегрирование, и указать область сходимости.

$$S(x) = 2 - 8x + 24x^2 - 64x^3 + \ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $S(x) = 2 - 8x + 24x^2 - 64x^3 + \dots$.

Найдем первообразную $F(x)$ функции $S(x)$:

$$F(x) = 2x - 4x^2 + 24x^2 - 64x^3 + \dots .$$

Нетрудно заметить, что $F(x)$ – геометрическая прогрессия, таким образом $F(x) = \frac{2x}{1+2x}$, где $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Дифференцируя функцию $F(x)$ найдем $S(x)$.

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} .$$

Таким образом $S(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$, где $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Задание 5

Найти сумму ряда, применяя дифференцирование ряда, указать область сходимости.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)n}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{n}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n-1}}{2n-1}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{3n-1}$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{x^{3n}}{n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{5n}}{n}$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n n}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{2^n (4n-1)}$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n}$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{n\cdot 3^n}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2(2n-1)}}{2n-1}$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n\cdot 5^n}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$ **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n x^{2n}}{2n}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n x^{2n-1}}{2n-1}$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n-1}}{3n-1}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n x^{n+1}}{n(n+1)}$ **32.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+1}}{9^n(2n+1)}$

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n x^{n+1}}{2n(n+1)}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{3^n(n+1)}$.

Пример выполнения задания 5

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+4}}{5^n(2n+4)}$, применяя дифференцирование ряда, указать область сходимости.

Решение. Рассмотрим функцию $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+4}}{5^n(2n+4)}$.

Дифференцируем:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{5^n}=-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{5^2}-\frac{x^9}{5^3}+\dots.$$

Эта геометрическая прогрессия, где $q=-\frac{x^2}{5}$, тогда область сходимости: $\left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)$, а сумма ряда

$$S'(x)=\frac{-\frac{x^5}{5}}{1+\frac{x^2}{5}}=-\frac{x^5}{x^2+5}=-\left(x^3-5x+\frac{25x}{x^2+5}\right).$$

$$S'(x)=-x^3+5x-\frac{25x}{x^2+5}.$$

Интегрируем:

$$S(x)=\int\left(-x^3+5x-\frac{25x}{x^2+5}\right)dx=-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2-\frac{25}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C.$$

Так как свободный член ряда отсутствует, то $S(0)=0$.

Из этого условия найдем C: $\quad 0=-\frac{25}{2}\ln 5+C, \quad C=\frac{25}{2}\ln 5$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+4}}{5^n(2n+4)}=-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2-\frac{25}{2}\ln\left(x^2+5\right)+\frac{25}{2}\ln 5$, $x\in\left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)$.

Задание 6

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать область сходимости.

1. $f(x)=2^x, \quad x_0=0$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x_0=1.$

3. $f(x)=\ln x, \quad x_0=1$.

4. $f(x)=\frac{1}{1+x}, \quad x_0=0.$

5. $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 1$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, $x_0 = 0$.

7. $f(x) = \ln(2x+1)$, $x_0 = 0$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $x_0 = -1$.

9. $f(x) = \ln(x+2)$, $x_0 = -1$.

10. $f(x) = \dfrac{1}{3+x}$, $x_0 = -2$.

11. $f(x) = \ln(x+3)$, $x_0 = -2$.

12. $f(x) = 3^{-x}$, $x_0 = 0$.

13. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

14. $f(x) = 3^{x}$, $x_0 = 0$.

15. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

16. $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$, $x_0 = -1$.

17. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$.

18. $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)^2}$, $x_0 = 0$.

19. $f(x) = \dfrac{1}{(3+x)^2}$, $x_0 = -2$.

20. $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$, $x_0 = 2$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 1$.

22. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = 1$.

23. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$, $x_0 = -1$.

24. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$, $x_0 = 0$.

25. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0 = 2$.

26. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $x_0 = 0$.

27. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 2$.

28. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 0$.

29. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$.

30. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x_0 = 0$.

31. $f(x) = \ln(2x+3)$, $x_0 = -1$.

32. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$, $x_0 = -1$.

33. $f(x) = \ln(6x-5)$, $x_0 = 1$.

34. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, $x_0 = -1$.

Пример выполнения задания 6

Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$. Указать область сходимости.

Решение. Ряд Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Вычислим коэффициенты ряда:

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $\qquad f(1)=1$;

$f'(x)=-(2x-1)^{-3/2}$, $\qquad f'(1)=-1$;

$f''(x)=3\,(2x-1)^{-5/2}$, $\qquad f''(1)=3$;

$f'''(x)=-3\cdot 5\ (2x-1)^{-7/2}$, $\qquad f'''(1)=-3\cdot 5$;

……………………………………………

$f^{(n)}(x)=(-1)^n 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2x-1)^{-\frac{2n+1}{2}}$; $\quad f'(1)=(-1)^n 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Таким образом, ряд имеет вид:

$$f(x)=1-1\,(x-1)+\frac{3}{2!}(x-1)^2+\frac{-3\cdot 5}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^n 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}(x-1)^n+\ldots.$$

Найдем область сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом $x-1\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Исследуя данный ряд на границах, т.е. при $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$ получим, что он сходится.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

Задание 7

Найти первые пять членов разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

1. $f(x)=x^3e^x,\quad x_0=0$

2. $f(x)=x^{10}-3x^5+1,\quad x_0=1$

3. $f(x)=e^{x^2-x},\quad x_0=1$

4. $f(x)=x\sqrt[3]{x},\quad x_0=2$

5. $f(x)=e^{x^2+2x},\quad x_0=-2$

6. $f(x)=x\sqrt{x},\quad x_0=4$

7. $f(x)=x^3\ln x,\quad x_0=1$

8. $f(x)=e^{x^2-2x},\quad x_0=0$

9. $f(x)=x^2\sin x,\quad x_0=0$

10. $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^{-2}},\quad x_0=3$

11. $f(x)=\dfrac{x}{x-2},\quad x_0=3$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x+3},\quad x_0=-2$

13. $f(x)=\dfrac{x}{x-1},\quad x_0=2$

14. $f(x)=\dfrac{x}{x-4},\quad x_0=5$

15. $f(x)=\left(2-e^x\right)^2,\quad x_0=0$

16. $f(x)=\sqrt{x}\ln x,\quad x_0=1$

17. $f(x)=x^4\ln x,\quad x_0=1$

18. $f(x)=e^{-2x^2},\quad x_0=0$

19. $f(x)=x\sqrt[3]{x},\quad x_0=3$

20. $f(x)=\dfrac{x}{x+4},\quad x_0=-3$

21. $f(x)=e^{2x}-e^{2x-x^2},\quad x_0=0$

22. $f(x)=\dfrac{x}{x+5},\quad x_0=-4$

23. $f(x)=x\sin 2x,\quad x_0=0$

24. $f(x)=\ln\left(10+x\right),\quad x_0=-9$

25. $f(x)=\dfrac{x}{x-5}, \quad x_0=6$

26. $f(x)=x\ln(1+x), \quad x_0=0$

27. $f(x)=x^{10}+x^5, \quad x_0=1$

28. $f(x)=x^{20}-x^{10}+x^5, \quad x_0=1$

29. $f(x)=\ln\cos x, \quad x_0=0$

30. $f(x)=\ln(6x-5), \quad x_0=1$

31. $f(x)=x^3-2x^7+5x^6-x+3, \quad x_0=1$

32. $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}, \quad x_0=1$

33. $f(x)=x\ln(x-1), \quad x_0=2$

34. $f(x)=x^5-2x^6+3x^7-7x^{10}+34, \quad x_0=1$.

Пример выполнения задания 7

Найти первые пять членов разложения функции

$$f(x)=x^{-2}+x^{-3}-3x^{-10}+7x^{-14}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

Решение. Ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots.$$

Вычислим коэффициенты ряда:

$f(1)=6$;

$f'(x)=-2x^{-3}-3x^{-4}+30x^{-11}-98x^{-15}$, $f'(1)=-73$;

$f''(x)=6x^{-4}+12x^{-5}-330x^{-12}+1470x^{-16}$, $f''(1)=1158$;

$f'''(x)=-24x^{-5}-60x^{-6}+3960x^{-13}-23520x^{-17}$, $f'''(1)=19644$;

$f^{IV}(x)=120x^{-6}+360x^{-7}-51480x^{-14}+399840x^{-18}$, $f^{IV}(1)=348840$.

Таким образом:

$a_0 = 6,\ a_1 = -73,\ a_2 = 579,\ a_3 = -3274,\ a_4 = 14535$.

Ответ: $a_0 = 6,\ a_1 = -73,\ a_2 = 579,\ a_3 = -3274,\ a_4 = 14535$.

Задание 8

Разложить данные функции в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать области сходимости.

1.	$x\sin^2 x^2$	**2.**	$x\cos\sqrt{x}$	**3.**	$x\cos\left(\frac{2}{3}x^3\right)$
4.	$\sqrt{1+2x}$	**5.**	$\frac{1}{\sqrt{e^x}}$	**6.**	$\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$
7.	e^{-x^4}	**8.**	$\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$	**9.**	$\sqrt[4]{1+x}$
10.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**11.**	$x^5\ln\left(1+x^2\right)$	**12.**	$1+xe^{-x}$
13.	$\sin^2 2x$	**14.**	$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)$	**15.**	$\cos^2 2x$
16.	e^{-3x^2}	**17.**	$\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$	**18.**	$\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
19.	$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^5}$	**20.**	$\frac{1}{x}\left(1-e^{-2x}\right)$	**21.**	$x\cdot\operatorname{arctg} x^2$
22.	$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$	**23.**	$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$	**24.**	$\frac{1}{4-x^2}$
25.	$x\cdot\operatorname{ch} x$	**26.**	$\cos^2 x^2$	**27.**	$x\cdot\operatorname{sh} x$
28.	$\sin^2 x^2$	**29.**	$\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	**30.**	$\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

31. $\sqrt{x}\cdot \mathrm{ch}\sqrt{x}$ **32.** $e^{-\frac{x^2}{2}}$ **33.** $\ln\left(1+x^2\right)$

34. e^{5x^3} .

Пример выполнения задания 8

Разложить функцию $f(x)=e^{-x^3}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать области сходимости.

Решение. Ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''}{3!}x^3+\ldots .$$

Воспользуемся известным разложением для функции $f(x)=e^x$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\ldots$, где область сходимости $x\in(-\infty;+\infty)$.

Пусть $-x^3=t$, тогда

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=1-x^3+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}+\ldots .$$

$x\in(-\infty;+\infty)$ – область сходимости.

Ответ: $e^{-x^3}=1-x^3+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^9}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}+\ldots$

Область сходимости $x\in(-\infty;+\infty)$.

Задание 9

Применяя метод последовательного дифференцирования, найти n членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (см. табл. 7).

Таблица 7

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Начальные условия	n
1	$y' = \arcsin y + x$	$y(0) = \frac{1}{2}$	4
2	$y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$	$y(0) = 2$	4
3	$y' = xy + \ln(x + y)$	$y(1) = 0$	5
4	$y'' = y \cos y' + x$	$y(0) = 1,$ $y'(0) = \frac{\pi}{3}$	5
5	$y' = x + y^{-1}$	$y(0) = 1$	5
6	$y'' = x^2 + y^2$	$y(-1) = 2$ $y'(-1) = 0{,}5$	7
7	$y' = 2x + \cos y$	$y(0) = 1$	5
8	$y'' = e^y \sin y$	$y(\pi) = 1,$ $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$	5
9	$yy' - y = 1 - x^2$	$y(0) = 1$	5
10	$y'' = (y')^2 + xy$	$y(0) = 4,$ $y'(0) = 2$	5
11	$y' + y \cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$	$y(0) = 1$	5
12	$xyy' = xy' - y$	$y(1) = 1$	6
13	$y' - y \cos^2 x + y^2 \sin x - \ln(x+1) = 0$	$y(0) = 3$	4
14	$y'' = xyy'$	$y(0) = 1,$ $y'(0) = 1$	6
15	$2y' - (x + y)y - e^x = 0$	$y(0) = 2$	4

Продолжение табл. 7

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Начальные условия	n
16	$y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x$	$y(0)=1,$ $y'(0)=2$	6
17	$y'' = yy' - x^2$	$y(0)=1,$ $y'(0)=1$	5
18	$y' = x^2 y + y^3$	$y(0)=1$	4
19	$y' = x \cdot \sin y'$	$y(1)=0,$ $y(1)=\frac{1}{2}$	5
20	$y' = x + 2y^2$	$y(0)=0$	2
21	$y'' = xyy' + y$	$y(0)=1,$ $y'(0)=1$	2
22	$y'' - xy^2 = 0$	$y(0)=1,$ $y'(0)=1$	4
23	$yy'' + y' + y = 0$	$y(0)=1,$ $y'(0)=0$	6
24	$y' = 2x - y$	$y(0)=2$	6
25	$yy'' + yy' = 2$	$y(0)=1,$ $y'(0)=1$	4
26	$y' = y^2 + x$	$y(0)=1$	5
27	$yy'' - x^2 y = 0$	$y(0)=1,$ $y'(0)=1$	5
28	$y'' = xy' + y + 1$	$y(0)=1,$ $y'(0)=0$	5
29	$y' = x^2 + y^2$	$y(0)=1$	5

Окончание табл. 7

30	$y' = y^3 - y^2 + \frac{1}{5}e^x$	$y(0) = \frac{1}{2}$	4
31	$y'' = x + y^2$	$y(0) = 0,$ $y'(0) = 1$	4
32	$y'' = e^{2y}$	$y(0) = 0,$ $y'(0) = 1$	5
33	$y'' = x^2 + y$	$y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$	4
34	$y'' - y'x + y = 1$	$y(0) = 0,$ $y'(0) = 1$	4

Пример выполнения задания 9

Применяя метод последовательного дифференцирования, найти $n = 3$ членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при заданных начальных:

$$y' = y^2 - y^3 + e^x \quad y(0) = 1 .$$

Решение. Степенной ряд имеет вид:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots ,$$

так как $y = (0) = 1$ и $y' = y^2 - y^3 + e^x$, то $y'(0) = y^2(0) - y^3(0) + e^0$

$$y'(0) = 1 - 1 + 1 , \qquad y'(0) = 1$$

$$y'' = 2y \cdot y' - 3y^2 \cdot y' + e^x , \quad y''(0) = 2 - 3 + 1 , \quad y''(0) = 0$$

$$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' - 6y(y')^2 - 3y^2 y'' + e^x , \quad y'''(0) = -3 .$$

Запишем решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена: $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!}x^n + \ldots$

Так как по условию $n = 3$

$$y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3.$$

Таким образом $y(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3$.

Ответ: $y(x) \approx 1 + x - \frac{x^3}{2}$.

Задание 10

Представить интеграл в виде ряда по степеням x.

1. $\int\limits_0^x x^2 e^{-x^2} dx$ **2.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ **3.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$

4. $\int\limits_0^x \cos x^3 dx$ **5.** $\int\limits_0^x \frac{\sqrt[5]{1+x^4} - 1}{x^3} dx$ **6.** $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

7. $\int\limits_0^x \sqrt{1+x^5}\, dx$ **8.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ **9.** $\int\limits_0^x \frac{\sin x^2}{x^2} dx$

10. $\int\limits_0^x x \cdot \sin x^2 dx$ **11.** $\int\limits_0^x \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x} dx$ **12.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x} dx$

13. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ **14.** $\int\limits_0^x e^{-x^4} dx$ **15.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}}$

16. $\int\limits_0^x x^5 \ln(1+x^2) dx$ **17.** $\int\limits_0^x 2x \cos\sqrt{x}\, dx$ **18.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

19. $\int\limits_0^x \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$ **20.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$ **21.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

22. $\int\limits_0^x \frac{1-\sin x}{x^3}dx$ **23.** $\int\limits_0^x e^{-3x^2}dx$ **24.** $\int\limits_0^x \operatorname{sh} x^2\, dx$

25. $\int\limits_0^x \cos^2 x^2 dx$ **26.** $\int\limits_0^x \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}dx$ **27.** $\int\limits_0^x \sin^2 x^2 dx$

28. $\int\limits_0^x \frac{e^x-1}{x}dx$ **29.** $\int\limits_0^x \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)dx$ **30.** $\int\limits_0^x \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

31. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$ **32.** $\int\limits_0^x x\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ **33.** $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

34. $\int\limits_0^x x^2\ln\left(1+x^3\right)dx$.

Пример выполнения задания 10

Представить интеграл $\int\limits_0^x t\sin\left(t^3\right)dt$ в виде ряда по степеням x .

Решение. Воспользуемся разложением

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\sin\left(t^3\right)=t^3-\frac{t^9}{3!}+\frac{t^{15}}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-3}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\int\limits_0^x t\cdot\sin\left(t^3\right)dt=\int\limits_0^x\left(t^4-\frac{t^{10}}{3!}+\frac{t^{16}}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{6n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dt=$$

$$=\frac{x^5}{5}-\frac{x^{11}}{11\cdot 3!}+\frac{x^{17}}{17\cdot 5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-1}}{(6n-1)(2n-1)!}+\ldots$$

Ответ: $\int\limits_0^x t\sin\left(t^3\right)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-1}}{(6n-1)(2n-1)!}$.

Задание 11

Вычислить приближенно с указанной степенью точности δ.

1. $\sqrt[3]{63}, \quad \delta = 10^{-3}$

2. $\operatorname{ch} 0{,}3, \quad \delta = 10^{-4}$

3. $\sqrt[4]{e}, \quad \delta = 10^{-4}$

4. $\ln 1{,}1, \quad \delta = 10^{-3}$

5. $\cos 1^\circ, \quad \delta = 10^{-4}$

6. $\sqrt[5]{e}, \quad \delta = 10^{-4}$

7. $\ln 2, \quad \delta = 10^{-3}$

8. $\ln 3, \quad \delta = 10^{-3}$

9. $\sqrt{e}, \quad \delta = 10^{-3}$

10. $\ln 5, \quad \delta = 10^{-4}$

11. $e^{-1}, \quad \delta = 10^{-3}$

12. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}}, \quad \delta = 10^{-3}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}, \quad \delta = 10^{-3}$

14. $\sqrt[4]{90}, \quad \delta = 10^{-3}$

15. $e^{2}, \quad \delta = 10^{-3}$

16. $\sqrt[6]{738}, \quad \delta = 10^{-3}$

17. $\sqrt[3]{e}, \quad \delta = 10^{-3}$

18. $\ln 10, \quad \delta = 10^{-3}$

19. $\cos 10^\circ, \quad \delta = 10^{-4}$

20. $\sqrt[7]{136}, \quad \delta = 10^{-3}$

21. $\sin 1^\circ, \quad \delta = 10^{-4}$

22. $\sqrt[5]{e^2}, \quad \delta = 10^{-3}$

23. $\sqrt[3]{1{,}3}, \quad \delta = 10^{-3}$

24. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}, \quad \delta = 10^{-3}$

25. $\sqrt[3]{80}, \quad \delta = 10^{-3}$

26. $\sqrt[3]{1{,}06}, \quad \delta = 10^{-4}$

27. $\sqrt[3]{8{,}36}, \quad \delta = 10^{-3}$

28. $\operatorname{arctg} 0{,}2, \quad \delta = 10^{-3}$

29. $\sqrt[5]{250}, \quad \delta = 10^{-3}$

30. $\ln 0{,}98, \quad \delta = 10^{-4}$

31. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}, \quad \delta = 10^{-4}$

32. $\sqrt{27}, \quad \delta = 10^{-3}$

33. $\sqrt[5]{1{,}08}, \quad \delta = 10^{-3}$

34. $\sqrt[3]{e^{-1}}, \quad \delta = 10^{-4}$.

Пример выполнения задания 11

Вычислить приближенно $\ln 1{,}02$ с указанной степенью точности $\delta = 10^{-4}$.

Решение. Воспользуемся известным разложением для $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad -1 < x \le 1.$$

Таким образом

$$\ln(1{,}02) = \ln(1+0{,}02) = 0{,}02 - \frac{0{,}02^2}{2} + \frac{0{,}02^3}{3} - \frac{0{,}02^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(0{,}02)^n}{n} + \ldots$$

Найдем слагаемое, которое будет меньше, чем $\delta = 10^{-4}$:

$$\frac{0{,}02^3}{3} < \delta = 10^{-4}.$$

Таким образом $\ln(1{,}02) \approx 0{,}02 - \dfrac{0{,}02^2}{2} = 0{,}0198$.

Ответ: $\ln(1{,}02) \approx 0{,}0198$.

Задание 12

Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1.	$\int_0^{0,2} \ln(1+x^2)\frac{dx}{x^2}$	**2.**	$\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx$	**3.**	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
4.	$\int_0^{0,1} e^{-5x^2}dx$	**5.**	$\int_0^{0,1} \ln(1+2x)\frac{dx}{x}$	**6.**	$\int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x^2}$
7.	$\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx$	**8.**	$\int_0^{1} \sqrt[3]{x}\cos x^2 dx$	**9.**	$\int_0^{\sqrt{3}/3} x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$
10.	$\int_0^{0,5} e^{-\frac{3}{23}x^2} dx$	**11.**	$\int_0^{0,5} \frac{\sin x\, dx}{x}$	**12.**	$\int_0^{0,25} \sin x^2 dx$

13. $\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x}{5}\right)\frac{dx}{x}$ **14.** $\int_0^{1/3} \operatorname{arctg} x^2 \frac{dx}{x}$ **15.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^3}{x^3} dx$

16. $\int_0^{0,1} \cos x^2 dx$ **17.** $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+4x)}{x} dx$ **18.** $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$

19. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ **20.** $\int_0^4 \sin\left(\frac{5}{2}x^2\right) dx$ **21.** $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$

22. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$ **23.** $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$ **24.** $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$

25. $\int_0^{0,4} e^{-\frac{3}{4}x^2} dx$ **26.** $\int_0^{0,1} e^{-2x^2} dx$ **27.** $\int_0^{0,5} e^{-0,4x^2} dx$

28. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\, dx$ **29.** $\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx$ **30.** $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

31. $\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx$ **32.** $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+8x)}{10x} dx$ **33.** $\int_0^{0,1} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$

34. $\int_0^{0,1} \sin(10x^3) dx$.

Пример выполнения задания 12

Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} e^{-4x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся известным разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Пусть $t=-4x^2$, $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{e^3}{3!}+...=1-4x^2+\dfrac{16x^4}{2!}-\dfrac{64x^6}{3!}+...$

$$\int\limits_0^{0,1} e^{-4x^2} = \int\limits_0^{0,1}\left(1-4x^2+8x^4-\frac{32}{3}x^6...\right)dx = x-\frac{4}{3}x^3+\frac{8}{5}x^5-\frac{32}{21}x^7+...\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$=0,1-\frac{4}{3}0,1^3+\frac{8}{5}(0,1)^5-\frac{32}{21}(0,1)^7-...-0=\left(\text{т.к.}\frac{8}{5}(0,1)^5=0,000016<0,001\right)\approx$$

$$\approx 0,1-\frac{4}{3000}=\frac{1}{10}-\frac{4}{3000}=\frac{296}{3000}=\frac{37}{375}.$$

Ответ: $\dfrac{37}{375}$ с точностью $\delta=0,001$.

Задание 13

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти общее решение дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x.

1. $y''-xy'+y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

2. $y''-x^2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

3. $y''=x^2y$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

4. $y''+xy'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

5. $y''+xy'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

6. $y''-xy'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

7. $y''=xy'+2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

8. $y''+x^2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9. $y''+x^2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

10. $y''=xy$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

11. $y''-xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

12. $y'' - 2xy' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

13. $y'' = 2(xy' + 2y)$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

14. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

15. $(1 - x^2)y'' = xy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

16. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

17. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

18. $y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

19. $y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

20. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

21. $(1 - x)y'' + xy' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

22. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

23. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

24. $y''' - yx = 6$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

25. $y''' = xy' + y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

26. $y''' - xy' = y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

27. $y''' - xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

28. $y''' - x^2y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

29. $y''' - x^2y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

30. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

31. $y''' = x^2y'' + xy' + y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

32. $(1 - x^2)y'' = 4xy' + 2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

33. $y'' - x^2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

34. $y'' - x^2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 1$.

Пример выполнения задания 13

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти общее решение дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x

$$y''' + \frac{1}{3}xy' - y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 0\,.$$

Решение. Так как уравнение 3-го порядка, то решение будем находить в виде полинома: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$,

так как $y(0) = 1$, то $D = 1$;

$y'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $\quad y'(0) = 0$, то $C = 0$;

$y''(x) = 6Ax + 2B$, $\qquad y''(0) = 0$, то $B = 0$;

$y''' = 6A$.

Подставим в уравнение

$y'''(0) + 0 - y(0) = 0$

$y'''(0) = 1$, $\quad y'''(0) = 6A$, $\quad 6A = 1$, $\quad A = \frac{1}{6}$.

Решение данного уравнения с начальными условиями имеет вид:

$y = \frac{1}{6}x^3 + 1$.

Ответ: $y = \frac{1}{6}x^3 + 1$.

ЛОГИНОВА Валерия Валерьевна
МОРОЗОВ Евгений Анатольевич
МОРОЗОВА Алена Витальевна
НОВОСЕЛОВ Антон Вячеславович
ПЛОТНИКОВА Евгения Григорьева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Сборник индивидуальных заданий по курсу

Учебное пособие

Редактор *Л.Л. Савенкова*
Корректор *Н.Н. Кропотина*
Дизайн, компьютерная верстка *Е.Н. Остапенко, В.Ф. Селезнев*

Подписано в печать 21.04.2011. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 16,51. Тираж 300 экз. Заказ № 140.

Издательство Пермского государственного университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК